

III. Abschnitt.

Das Abel'sche Theorem und das Umkehrproblem der hyperelliptischen Functionen: Abel bis Weierstrass.

(205)

A. Niels Henrik Abel [1825–1829].

1. Jacobi über Abel

In dem Briefe an LEGENDRE, in welchem JACOBI (Corresp. math. entre L. et J., Journ. f. Math. Bd. 80, Werke I, S. 447) der Nachricht von dem Tode ABEL's gedenkt, giebt er einen Ueberblick über die Probleme, deren Lösung ABEL sich vorgesetzt habe. Es seien die folgenden gewesen:

- α . Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Wurzelzeichen anzugeben;
- β . ebenso für die Darstellbarkeit eines Integrals durch geschlossene Ausdrücke;
- γ . die Erforschung allgemeiner Eigenschaften der Integrale algebraischer Functionen.

„Alles eigenartige Fragestellungen, an die vor ABEL Niemand zu denken gewagt hatte.“

Uns beschäftigt hier vor den anderen die an dritter Stelle erwähnte. Dank den vortrefflichen Ausgaben der Werke ABEL's, die wir besitzen:

- (1) Oeuvres complètes de N. H. ABEL par HOLMBOE, 2 voll. Christiania 1839.
- (2) Oeuvres complètes de N. H. ABEL p. par L. SYLOW et S. LIE, 2 voll. 1881 (mit Noten der Herausgeber),

und den Biographien von HOLMBOE (Vorrede zu (1)) und BJERKNES (N. H. ABEL, Paris 1885) sind wir über die Hilfsmittel, die ABEL bei seinen frühesten Studien zur Verfügung standen, genau genug unterrichtet, um die Quellen zu erkennen, aus welchen ABEL bei der Conception jener Probleme geschöpft hat, die aus der ersten Periode seiner überhaupt nur sechsjährigen productiven Thätigkeit stammen.

(206)

2. Ursprung des Abel'schen Theorems: Bernoulli, Fagnano, Euler.

Am frühesten beschäftigten ihn EULER's Schriften, die er zusammen mit HOLMBOE (s. d. Biogr.) las. Vergewärtigen wir uns den Kreis von Vorstellungen, die ihm von dorthen zuflossen.

Den Stand der Integralrechnung vor EULER bezeichnen treffend die Worte, mit denen LEGENDRE seine Exercices de calcul intégral (1811) einleitet: „Nachdem die Differential-Ausdrücke, die sich algebraisch oder durch Kreisbögen und Logarithmen integrieren lassen, erschöpft waren, beschäftigte man sich mit der Aufsuchung solcher Differentiale, welche durch Ellipsen und Hyperbelbögen sich ausführen lassen.“ Fast dieselbe Wendung findet sich schon in MAC LAURIN's Treatise on fluxions¹. Wenn man so allgemein die Zurückführung eines Integrals *auf Kegelschnittbögen* bereits als eine Lösung der Aufgabe ansah, so konnte es nicht fehlen, dass ebenso, wie man die Bögen eines Kreises durch die Ausdrücke für $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin 2\alpha$, u.s.w. *mit einander* verglich, dies auch mit den Bögen, welche *derselben* Ellipse, Hyperbel oder Lemniscate (einer Fusspunktcurve der gleichseitigen Hyperbel) angehören, versucht wurde. Bei der cubischen Parabel war die Vergleichung schon JOHANN BERNOULLI 1698 (Opera I, S. 252, vergl. auch die Bemerkung über das Additionstheorem der Kreisfunctionen in einem Briefe an LEIBNIZ, L. Math. Schr. her. v. GERHARDT III, S. 186) gelungen. Die Eigenschaft dieser Curve „mit sich selbst verglichen rectificirbar zu sein“, d. h. „von der man zwei Bögen angeben könne, deren Differenz construierbar ist“, rühmt er als eine „proprietas perelegantissima“, auf die er durch Zufall gekommen sei. 1714 entdeckte FAGNANO eine ähnliche Eigenschaft bei der Lemniscate (Abh. in dem Giornale de' Litterati d'Italia, XXII, 1714 u. ff., Venezia, gesammelt in: Produzioni matematiche di FAGNANO, Pesaro 1750)². EULER leitet seine erste hieran anschliessende Abhandlung (Nov. Comm. Petrop. VI, 1761), der bald eine Reihe von anderen folgen sollte, in denen er das berühmte Additionstheorem der elliptischen Functionen begründet, mit folgenden bemerkenswerten Worten ein: „Wenn man die mathematischen Speculationen auf ihren Nutzen ansieht, so

¹Vergl. hierzu FELIX MÜLLER, Studien über M. LAURIN's geom. Darstellung ellipt. Integrale. Progr. Realsch. Berl. 1875; zur Geschichte des Additionstheorems überhaupt: CASORATI, Teorica etc. (Rf. II, 37) S. 4ff.

²Man vergl. ENNEPER, Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte. 1. Aufl. Halle 1876, Noten VI, VII.

kann man sie in zwei Klassen teilen: einmal solche, die dem gewöhnlichen Leben oder anderen Wissenszweigen einen hervorragenden Vorteil gewähren, und deren Wertschätzung daher nach der Grösse dieses Vorteils bemessen zu werden pflegt. Die andere Klasse umfasst diejenigen Speculationen, die, ohne directen Vorteil zu gewähren, doch wertvoll sind, weil sie geeignet sind, die Grenzen der Analysis auszudehnen und die Kräfte unseres Geistes zu üben. Da nämlich viele Forschungen, von denen man sich grossen Nutzen versprechen könnte, wegen der Unzulänglichkeit der Analysis verlassen werden müssen, so ist wohl denjenigen Speculationen kein geringer Wert beizumessen, die einen nicht unbeträchtlichen Zuwachs für die Analysis versprechen. Diesem Zweck scheinen aber zumal solche Bemerkungen zu dienen, die, gelegentlich gemacht und a posteriori entdeckt, zu directer Auffindung a priori wenig oder keine Aussicht hatten. Nachdem man aber ihre Richtigkeit erkannt hat, lassen sich leichter Methoden finden, die zu ihnen hinführen, und es unterliegt keinem Zweifel, dass eben durch die Aufsuchung solcher neuer Methoden das Gebiet der Analysis nicht wenig erweitert wird. — Bemerkungen dieser Art, die auf einer bestimmten Methode nicht beruhen und deren innerer Grund verborgen scheint, sind mir in einer jüngst publicirten Abhandlung [EULER meint wohl die Gesamtausgabe der Werke] des Grafen FAGNANO aufgestossen.“ (207)

3. Das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Gattung.

EULER entnimmt dann auch zunächst den „Produzioni“ nicht mehr als die That- sache, dass der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \quad (1)$$

durch den Wert: $x = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}$ genügt werde. FAGNANO hatte auf diesen Umstand seine berühmte Theilung des Lemniscatenbogens gegründet. Aber EULER gewinnt dem Ergebnis eine Seite ab, deren Bedeutung im weiteren Verlauf ins Ungemessene gewachsen ist. Ihm ist jene Gleichung, in rationaler Form: $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$, ein „particuläres Integral“ der Differentialgleichung 1), wie die Gleichung $x = y$ auch eines ist. Das „vollständige“ Integral, welches eine willkürliche Constante involvirt, muss so beschaffen sein, dass es beide umfasst. EULER gelangte zu demselben, wie es scheint, durch Probiren. Differentiirt man die Gleichung (l. c. p. 50):

$$0 = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta x^2y^2 \quad (2)$$

in zweckmässiger Anordnung, so lässt sich das Differential mit Hülfe von 2) in

die Form bringen:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \quad (3)$$

(208) wo X eine ganze Function vierten Grades ist, ans deren vier Coefficienten sich, die fünf in 2) mit Zuhülfenahme von einer willkürlichen Constanten zusammensetzen lassen. Die Relation 2) ist also das vollständige Integral von 3) und geht, wenn sich 3) auf 1) reducirt, in:

$$x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1 - c^4}$$

über. „Es erscheint wunderbar“, sagt EULER in der Anzeige seiner Abhandlung (l. c. Summarium p. 8), „dass, wiewohl ein solches Integral weder durch Kreis- noch logarithmische Functionen auswertbar ist, doch allgemein der Differentialgleichung 3) durch eine algebraische Relation genügt werden kann.“ Mit anderen Worten: der trivialen Integralgleichung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \int \frac{db}{\sqrt{B}}, \quad (4)$$

wo b eine willkürliche Constante ist, tritt die mit ihr vollkommen gleichwertige algebraische Beziehung 2) zur Seite. Führt man die Constante b in 2) ein, so erhält diese Gleichung, wie EULER später bemerkt, eine in $x, y, -b$ symmetrische Gestalt, wenn man alle Irrationalitäten beseitigt. Insbesondere tritt für $X = A + Cx^2 + Ex^4$ an Stelle von 2) die Gleichung (Instit. calc. integr. I, § 612):

$$\begin{aligned} A^2(x^4 + y^4 + b^4) - 2A^2(x^2y^2 + x^2b^2 + y^2b^2) - 2AE x^2y^2b^2(x^2 + y^2 + b^2) \\ - 4ACx^2y^2b^2 + E^2x^4y^4b^4 = 0. \end{aligned}$$

4. Dasselbe für Integrale höherer Gattung.

Aber EULER bleibt hierbei nicht stehen. Wie ihn die Vergleichung von Lemniscatenbögen auf die der allgemeinen elliptischen Integrale erster Gattung geführt hat, so dient ihm die ebenfalls von FAGNANO geleistete Vergleichung von Ellipsenbögen zur Aufstellung des Additionstheorems der Integrale zweiter Gattung.

EULER formulirt FAGNANO'S Entdeckung folgendermassen: der Differential-Ausdruck:

$$dx\sqrt{\frac{1 - nx^2}{1 - x^2}} + dy\sqrt{\frac{1 - ny^2}{1 - y^2}} = dV \quad (5)$$

lässt sich durch Annahme einer gewissen algebraischen Relation zwischen x und y in integrable Form bringen. Setzt man nämlich:

$$\frac{1}{y} = \sqrt{\frac{1 - nx^2}{1 - x^2}}, \quad \text{und also:} \quad \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1 - ny^2}{1 - y^2}}, \quad (6)$$

so verwandelt sich, wenn man 6) rational macht und differentiirt, dV in $dx/y + dy/x = n d(xy)$ (Act. N. Petr. VI, p. 60). Also ist umgekehrt 6) ein particuläres Integral der Differentialgleichung $dV = n d(xy)$.

Aber schon in dem folgenden Aufsatz (l c. T. VII) hat er (wohl mit der Bemerkung, dass die Gleichung 6) in 2) einbegriffen ist) den endgültigen Ausgangspunkt auch für diese Gattung von Fragen gefunden, indem er die Aufgabe stellt: unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen 2) und 3) bestehen, mit ihrer Hülfe das Differential³ $d\Pi(x) + d\Pi(y) = dV$, wo :

$$\Pi(x) = \int \frac{r(x) dx}{\sqrt{X}}$$

und $r(x)$ eine ganze Function ist, in „integrable Form“ zu bringen, d. h. als Differential eines algebraischen [rationalen] und logarithmischen Ausdrucks oder von Kreisfunctionen [symmetrisch in x und y] darzustellen. EULER findet, dass bei dieser erweiterten Fassung $r(x)$ überhaupt keiner weiteren Bedingung unterliegt, dass es also immer möglich ist, eine Function V von den angegebenen Eigenschaften zu finden, derart, dass

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(b) + V$$

wird.

Wir haben dem Theorem gleich die erweiterte Fassung gegeben, in der es EULER in seinen Institutiones calculi integralis (Vol. I, § 645) reproducirt, welchen es ABEL entnahm.

Soweit EULER, der wiederholt die Wichtigkeit des Gegenstandes betont. Er hält jedoch (§ 640) eine Ausdehnung seiner Methode auf höhere als Quadratwurzeln oder auf Functionen von höherem Grade unter dem Wurzelzeichen, als dem vierten, nicht für thunlich, indem er auf den Fall hinweist, dass die Wurzel ausziehbar ist, und alsdann unter Umständen zwischen Logarithmen und Kreisfunctionen eine algebraische [in der Sprache jener Zeit selbstverständlich zugleich: reelle] Beziehung bestehen müsste, was doch unmöglich angehe. Vorgreifend bemerken wir gegenüber diesem Bedenken, dass sich von selbst die zu 4) analoge Relation zwischen den Integralen in zwei und mehr linear unabhängige zerlegt, wenn an Stelle jener einzelnen 2) ein System von algebraischen Relationen tritt.

5. Umgestaltung der Euler'schen Relation zwischen den oberen Grenzen der elliptischen Integrale.

Mit dem Vorstehenden haben wir den Gedankenkreis und die Probleme umgrenzt, die nun ABEL's Erfindungskraft herausforderten. Die Brücke aber, die von EULER

³Functionszeichen wie $\Pi(x), r(x)$ kommen bei EULER nicht vor. Wir gebrauchen sie zur Abkürzung.

zu ABEL hinüberführt, glauben wir in einer gewissen Umgestaltung zu erkennen, welche ABEL mit der zwischen x, y, b bestehenden algebraischen Gleichung (oben Nr. 3) vornahm.

(210) EULER hatte diese Gleichung bereits in eine hinsichtlich dieser drei Grössen symmetrische Gestalt gebracht. Nun waren bekanntlich die Fortschritte, welche die Theorie der Gleichungen seit EULER gemacht hatte, für ABEL nicht verloren gegangen. Ihm lag der Gedanke nahe, jene zwischen den symmetrischen Functionen von x, y, b bestehende Relation zur Bildung derjenigen Gleichung dritten Grades zu verwenden, die für eine dieser Grössen, etwa x , besteht, **welcher dann aber auch y und b genügen müssen**. Man erhält sie sogleich, indem man die identische Gleichung, deren Wurzeln x, y, b sind, mit Hülfe jener Relation umformt.

Diese Gleichung nun ist es, die der Kernpunkt der Entdeckung ABEL's gewesen zu sein scheint. Sie lässt sich in die Form bringen:

$$vx.\sqrt{X'} - v'x\sqrt{X''} = 0, \quad (1)$$

wo $X'X'' = X$ ist, und $vx, v'x$ ganze Functionen von x sind, von solchem Grad, dass 1), auf rationale Form gebracht, den dritten Grad nicht übersteigt. Die Coefficienten in v, v' hängen von y und b , oder vielmehr von zwei symmetrischen Functionen dieser Grössen ab, und sind durch y, b bestimmt. Man kann aber auch die (zwei) wesentlichen Coefficienten in v, v' (v ist vom ersten Grad, v' constant, wenn X' vom ersten, X'' vom dritten Grad ist) als gegebene Grössen ansehen; sie sind mit y, b durch die Relationen verbunden:

$$vy.\sqrt{Y'} - v'y.\sqrt{Y''} = 0 \quad vb.\sqrt{B'} - v'b.\sqrt{B''} = 0. \quad (2)$$

Jene Gleichung 1) besteht nun zunächst auch im Falle beliebig vieler elliptischer Integrale. Denn die Zahl der Integrale, welche mit einander verglichen werden, vermehrt sich einfach dadurch, dass man den Grad der Functionen $vx, v'x$, erhöht, wobei zugleich die Zahl der willkürlich annehmbaren Grössen in 1) entsprechend zunimmt. Aber eines bleibt: die Eigenschaft der Integralsumme, durch eine algebraische und logarithmische Function der Coefficienten von v, v' ausdrückbar zu sein. Denn wie im einfachsten Falle vermöge der Gleichungen 1), 2) die irrationale Differentialsumme durch ein rationales Differential symmetrischer Functionen von x, y, b darstellbar ist, so lässt sich hier wieder die Summe durch symmetrische Functionen der neuen oberen Grenzen rational ausdrücken, die man erhält, wenn man die Summanden unter Benutzung der Gleichungen 1), 2) und ihrer Differentiale umformt, indem man die symmetrischen Functionen der Grenzen durch die Coefficienten ersetzt.

6. Ausdehnung auf hyperelliptische Integrale: Abel.

Alle diese Schlüsse sind aber auch, wie man ohne Weiteres einsieht, *durchaus nicht an den Grad von X gebunden*; auch der Zähler rx der In-

tegranden braucht nur allgemein eine rationale Function zu sein. So beseitigt der (211)
Gedanke ABEL's, die Gleichung 1) an Stelle der zwischen den oberen Grenzen bestehenden Relation zum Ausgangspunkt zu wählen, die Schwierigkeiten, die sich EULER gegenübergestellt hatten, als er zu den hyperelliptischen Integralen aufsteigen wollte.

Diese Gleichung giebt sofort Anlass zu einer weiteren wichtigen Bemerkung, die ABEL in seiner Pariser Arbeit (unten Nr. 8 (1)) sorgfältig verfolgt und zu einer neuen bedeutenden Fragestellung erhebt.

Weil nämlich, wenn X eine Function vorn Grade $2m$ oder $2m - 1$ ist, die Gleichung 1), rational gemacht, mindestens bis zum Grade $m + \alpha - 1$ ansteigen muss, wenn α Wurzeln willkürlich annehmbar sein sollen, so ist die Summe der zugehörigen α Integrale darstellbar als Summe von mindestens $m - 1$ anderen (durch sie bestimmten), wozu noch jene logarithmische und algebraische Function V der Coefficienten von vx , $v'x$ kommt. Es existirt also eine Minimalzahl von Integralen, auf die man eine gegebene Integralsumme zurückführen kann. Daraus erklärt sich die Schwierigkeit, auf die EULER's Formulirung bei hyperelliptischen Integralen stossen musste: die in der transcendenten Gleichung auftretende Integrationsconstante war nicht, wie bei der elliptischen Integralsumme, durch ein, sondern nur durch zwei oder mehr hyperelliptische Integrale ersetzbar, ein merkwürdiger Umstand, der sich nicht entfernt voraussehen liess, und den in expliciter Form später JACOBI zur Grundlage seines Umkehrproblems umgestaltete.

Im Besitze aller damals flüssigen Hilfsmittel der Theorie der algebraischen Gleichungen blieb jedoch ABEL auch bei dieser Verallgemeinerung nicht stehen.

Wenn man die für hyperelliptische Integrale bestehende Gleichung:

$$vx.\sqrt{X'} - v'x.\sqrt{X''} = 0, \quad (1)$$

wo $X'X'' = X$ ist, durch die zwei simultanen ersetzt:

$$y^2X'' - X' = 0$$

$$y.vx - v'x = 0,$$

wo die veränderlichen Parameter nun bloss in die zweite Gleichung eingehen, und infolge dessen das vorliegende Integral die Form annimmt (rx eine rationale Function von x):

$$\int \frac{rx \cdot dx}{\sqrt{X}} = \int f(x, y) dx,$$

so stellt sich das erweiterte Problem:

7. Integrale algebraischer Functionen.

Gegeben seien zwei algebraische Gleichungen zwischen den Variablen x und y (212)

$$\chi(x, y) = 0 \quad \Theta(x, y) = 0, \quad (3)$$

wo $\chi(x, y)$ eine ganze Function mit gegebenen Coefficienten, $\Theta(x, y)$ eine solche mit (veränderlichen) willkürlichen Coefficienten darstellt; zu untersuchen, ob eine Summe von Integralen der Form:

$$\psi x = \int f(x, y) dx,$$

wo $f(x, y)$ eine rationale Function von x und y ist, als logarithmische und algebraische Function V der Coefficienten von Θ (und χ) darstellbar ist, wenn die oberen Grenzen der Summanden von allen Wertepaaren $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_\mu, y_\mu$ gebildet werden, die zugleich beiden Gleichungen 3) genügen. Es zeigt sich, dass der Gang der Untersuchung keinerlei Abänderung gegen früher zu erfahren braucht; die bejahende Antwort auf die Frage ist der Inhalt des berühmten „ABEL'schen Theorems“, das sich also darin ausdrückt, dass zu jenen Gleichungen 3) die folgende hinzutritt:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu = V.$$

Die Stelle der Gleichung 1) vertritt die Resultante aus den Gleichungen 3), die durch Elimination von y entsteht; y ist vermöge $\chi(x, y) = 0$ als die allgemeinste **algebraische Function** von x definiert; dieser Begriff wird hier zum ersten Mal in den Bereich eines **Satzes** einbezogen und erhält dadurch Leben und Bedeutung. In diesem Sinne ist ABEL der **Begründer** der Theorie der algebraischen Functionen.

Aber auch die Frage nach der Minimalzahl von Integralen, auf die eine gegebene Integralsumme reducirbar ist, bleibt hier als Cardinalfrage bestehen; sie veranlasst ABEL zu jenen ausgedehnten und mühsamen Abzählungen, die das Hauptergebnis seiner grossen Pariser Arbeit ausmachen, und die ihn lange vor RIEMANN in den Besitz des Begriffes „Geschlecht“ eines algebraischen Gebildes setzen.

Wir geben nun einen Ueberblick über diejenigen Abhandlungen ABEL's, die jenes Theorem behandeln und besprechen dann den Inhalt der grössten, der Pariser Abhandlung.

8. Abel's Abhandlungen in Bezug auf das nach ihm benannte Theorem.

(213) Mit dem Theoreme, welches auf JACOBI's Vorschlag⁴ das ABEL'sche genannt worden ist, dem „monumentum aere perennius“ nach LEGENDRE⁵, tritt ABEL, erfüllt von dessen Tragweite, in drei verschiedenen Publicationen hervor. Die erste grösste hat er in Paris vollendet und 1826 der Pariser Academie eingereicht. Sie führt den Titel:

⁴Consid. gen. etc. Journ. f. M. IX, Werke II, S. 7; vorher in Anz. v. LEGENDRE's Traité des f. ellipt. Journ. f. M. VIII, Werke I, S. 373.

⁵Brief an CRELLE, Journ. f. M. VIII (Jac. Anz. v. Legendre's Traité; wohl nach der Aeusserung in L.'s Brief an J. vom 4. Juni 1829, J. f. M. Bd. 80).

- (1) Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes, prés. à l'Acad. 30. oct. 1826. — Mém. prés. par divers sav. étr. t. VII, Paris 1841. Oeuvres éd. SYLOW et LIE I, p. 145–211.

Eine Mitteilung des Satzes nebst Beweis enthält ferner die Note mit dem fast gleichlautenden Titel:

- (2) Démonstration d'une propriété générale etc. Cr. Journ. f. Math. IV. 1829. Oeuvres S. et L. I, p. 515–517.

Die Abhandlung:

- (3) Remarques sur quelques propriétés etc. Cr. J. f. M. III, 1828. Oeuvres S. et L. I, p. 444–456,

spricht denselben Satz aus unter Beschränkung auf hyperelliptische Integrale, aber mit Angabe der Form, in welcher die logarithmische und algebraische Function auftritt, und ist im Wesentlichen eine Reproduktion eines Teiles der Pariser Abhandlung. Endlich findet man in einem hinterlassenen Manuscript, dessen Abfassung der Reise ABEL's nach Paris vorausgeht, also wohl in das Jahr 1825 fällt:

- (4) Sur la comparaison des fonctions transcendentes. Oeuvr. S. et. L. II, p. 55–66,

wieder den allgemeinen Satz bewiesen. ABEL wendet dort seine Aufmerksamkeit der Bestimmung der Constanten in der Gleichung zwischen den Integralen zu und geht dann auf den Fall über, dass y eine *rational*e Function von x ist, woran sich die Auswertung zahlreicher symmetrischer Functionsausdrücke (in Bruchform) reiht.

9. Die Pariser Abhandlung. Darstellung der algebr. und log. Function, der die Integralsumme gleich wird.

Aus dieser Uebersicht geht hervor, dass es genügt, allein den Inhalt der Pariser Schrift (1) zu analysiren. Dies scheint aber um so mehr erforderlich, als sie wegen ihrer verspäteten Publication nur wenig bekannt geworden ist und, obwohl sie auf die nächstfolgende Production keinen Einfluss geübt hat, doch zum ersten Mal wesentliche Begriffe der Theorie der ABEL'schen Functionen entwickelt, die in anderen Abhandlungen ABEL's nicht auftreten⁶.

(214)

⁶Die oben erwähnte zweite Ausgabe der Werke ABEL's enthält zu der nicht leicht geschriebenen Pariser Abhandlung vortreffliche Noten von SYLOW, die, teils kritisch, teils erläuternd, dunkle Stellen besprechen. Von Arbeiten, die direct an diese Abhandlung anschliessen, sind uns nur noch folgende bekanntgeworden: 1) Ein grösserer Aufsatz von ROWE: On ABEL's Theorem (Philos. Trans. 172, 1881), Mai 1880, reproducirt den Inhalt in der heutigen Darstellungsweise, geht aber nicht auf alle schwierigen Partien ein. 2) Die unmittelbar anschliessende Arbeit

Mit dem summarischen Beweise des Theorems, den ABEL später in (2) reproducirt, leitet die Abhandlung (1) ein (§§ 1, 2), geht aber dann sogleich auf die wirkliche Darstellung (§ 4) der logarithmischen und algebraischen Function V über, durch die sich die Integralsumme:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = V$$

ausdrücken lässt, wenn x_1, x_2, \dots, x_μ die Wurzeln der Gleichung:

$$r(x) = 0$$

sind, die durch Elimination von y aus den Gleichungen:

$$\chi(x, y) = y^n + y^{n-1}p_{n-1} + y^{n-2}p_{n-2} + \cdots + p_0 = 0$$

$$\Theta(x, y) = y^{n-1}q_{n-1} + y^{n-2}q_{n-2} + \cdots + q_0 = 0$$

entsteht. Hier sind die p, q ganze Functionen von x von irgend welchen Graden, wobei in die q noch willkürliche Constanten a, a', a'', \dots linear eingehen [wir werden sie „Parameter“ nennen]. Die rechte Seite V der transcendenten Gleichung stellt sich als algebraische und logarithmische Function dieser Parameter dar (s. No. 6).

Von den gemeinsamen Wertsystemen der Gleichungen $\chi = 0, \Theta = 0$ kann eine Anzahl von den Parametern a, a', a'', \dots unabhängig sein. Dann scheidet sich aus der Resultante rx ein von diesen unabhängiger Factor F_0x aus, so dass in:

$$rx = F_0x.Fx$$

nur Fx noch von den $a, a' \dots$ abhängt.

(215) Bedient man sich der später von CLEBSCH eingeführten geometrischen Interpretationsweise, so ist $\chi = 0$ die Gleichung einer festliegenden Curve mit den CARTESISCHEN Coordinaten x und y , $\Theta = 0$ die einer anderen Curve, deren Lage und Gestalt mit den Parametern a sich ändert, so zwar, dass ein Teil ihrer Schnittpunkte mit der „Curve χ “ (der Curve, deren Gleichung $\chi = 0$ ist) fest ist, ein Teil mit den Parametern in Θ sich ändert („beweglich“ ist). Die Abscissen der festen sind durch $F_0x = 0$, die der beweglichen durch $Fx = 0$ gegeben. Wir werden diese wegen ihrer kurzen Ausdruckweise bequeme Interpretation in der Folge oft gebrauchen.

Für das zu Grunde gelegte Integral wählt nun ABEL die folgende Form:

$$\psi x = \int f(x, y) dx = \int \frac{f_1(x, y) dx}{f_2x.\chi'y},$$

von CAYLEY „Addition to ROWE's Memoir“ bezieht sich auf die Berechnung der (s. unten) ABEL'schen Zahl γ mit den in Rf. VI Nr. 20 entwickelten Hilfsmitteln. 3) Eine jüngst erschienene Abhandlung von BAKER (Cambr. Trans. XV, Part. IV, im Auszug Math. Ann. 45 S. 133) enthält Vorschläge zu einer graphischen Ermittlung der Zahl γ .

wo f_1, f_2 ganze Functionen der beigesetzten Variabeln, $\chi'y$ die Ableitung von χ nach y ist. Diese letztere in den Nenner zu setzen, scheint für ABEL zunächst kein anderer Anlass vorhanden gewesen zu sein, als die Analogie mit einfacheren Fällen. Wenn z. B. χy die Form hat: $y^2 + p_1 y + p_2 = 0$, so führt die Verallgemeinerung des elliptischen Integrals 1. Gattung mit Notwendigkeit darauf (s. JACOBI „De theor. Ab. observatio“, Journ. f. M. III, Werke II, S. 3), die Discriminante (in irrationaler Form $\chi'y$) in den Nenner zu setzen. — In der That wird der Ausdruck für V ebenso einfach, wenn man $\chi'y$ weglässt, wie dies die Ergebnisse von JÜRGENSEN und MINDING (s. unten III, B) zeigen; die irrationale Form von V lässt sich auch so nicht vermeiden. Wir kommen darauf übrigens unten noch einmal zurück (Nr. 11). Abgesehen von einer additiven Constanten C setzt sich nun die rechte Seite $V = P + Q + C$ aus zwei Teilen zusammen, deren einer die Form hat:

$$P = - \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_1(x, y_i)}{f_2 x \cdot \chi' y_i} \log \Theta(x, y_i) \right]_{x^{-1}},$$

wo $[\]_{x^{-1}}$ den Coefficienten der (-1) ten Potenz der Entwicklung des Klammerausdrucks nach absteigenden Potenzen von x bedeutet. Der andere hat in einer der heutigen Ausdrucksweise angepassten Form und nach Verbesserung eines von SYLOW (A. Oeuvr. II, S. 296) angegebenen Rechenfehlers die Gestalt ($\Gamma \nu_k = 1.2 \dots (\nu_k - 1)$):

$$Q = \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{1}{\Gamma \nu_k} \frac{d^{\nu_k-1}}{dx^{\nu_k-1}} \left(\frac{(x - \beta_k)^{\nu_k}}{f_2 x} \sum_{i=1}^n \frac{f_1(x, y_i)}{\chi' y_i} \log \Theta(x, y_i) \right),$$

wo die Summe \sum' sich auf alle diejenigen Unendlichkeitsstellen $x = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha}$ des Integranden $\frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y}$ erstreckt, wo dieser, entweder in Folge von $f_2 = 0$ oder für solche Nullpunkte von F_0 , für die zugleich $\chi'y = 0$ ist, in den Ordnungen bezw. $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\alpha}$ (ganze Zahlen) unendlich wird.

10. Die Integralsumme gleich einer Constanten. — Die Zahl γ der Constanten des Integrals, für welches dies eintritt.

Von Interesse ist nun vor Allem der Fall (§ 5), dass sich die logarithmische und algebraische Function V , der die Integralsumme gleich ist, für beliebige $a, a', a'' \dots$ auf eine **Constante** reducirt. Aus der Form, die man für V im allgemeinen Fall gefunden hat, lässt sich, zunächst unter Annahme von $F_0 x = 1$, d. h. unter der Annahme bloss beweglicher Schnittpunkte von χ mit Θ , ein Schluss ziehen auf die Form, welche alsdann die Functionen f_2 und f_1 in dem Ausdruck für ψx annehmen müssen. ABEL findet: (216)

1) Es muss $f_2x = 1$ sein, weil nur so (zugleich mit allen ν) das Glied Q verschwindet, ohne dass Beziehungen zwischen den a, a', \dots stattfinden. Wir bemerken gleich hier, dass ABEL dabei den Fall übersieht, dass auch durch Relationen zwischen den β der Ausdruck Q unabhängig von den a zu Null werden kann; $f_2x = 1$ ist also nicht notwendiges Erfordernis dafür, dass $Q = 0$ ist (vgl. CLEBSCH-GORDAN, ABEL'sche Functionen § 13, 6) (S. 49)).

2) Für $f_1(x, y)$ findet ABEL aus $P = 0$ die Bedingung, dass die Entwicklung von

$$\frac{f_1(x, y)}{\chi'y}$$

nach absteigenden Potenzen von x (also für die unendlich fernen Punkte der Curve χ) mit einem Glied $Ax^{-\alpha}$ beginnen müsse, wo $a > 1$ ist. Dies giebt für den Grad von $f_1(x, y)$ hinsichtlich y und den Grad der Coefficienten p in χ hinsichtlich x je eine gewisse obere Grenze, die ABEL genau bestimmt. Die so definirte Function f_1 hat nun noch eine Anzahl γ von willkürlichen Constanten, die linear und homogen eingehen, und es zeigt sich, dass diese Zahl γ abhängt (§ 5, Formel (62)) bloss von den bei der Entwicklung von y nach absteigenden Potenzen von x auftretenden Exponenten, also von Eigenschaften der Function $\chi(x, y)$ allein. Der so gefundene Ausdruck für γ setzt indessen voraus (§ 5, F. (50)), dass jene Entwicklungen von y in den ersten Gliedern nicht übereinstimmen, geometrisch gesprochen, dass die unendlich fernen Zweige der Curve χ keine Berührung mit einander eingehen, und dass keine „superlinearen“ (CAYLEY) Zweige mit mehr als einem „kritischen“ Exponenten (s. Ref. über Sing. Punkte VI Nr. 13) vorkommen (wie z. B. $y = x^{-2} + x^{-5/2}$).

11. Feste Schnittpunkte der beweglichen mit der festen Curve.

In dem bisher ausgeschlossenen Fall, dass F_0x sich nicht auf eine Constante (§ 5. a. E.) reducirt, sind die Bedingungen für die Zählerfunction $f_1(x, y)$ zu modificiren (während $f_2x = 1$ beibehalten wird). Ist nämlich $x = \beta, y = B$ ein Wertepaar, für welches, unabhängig von den Parametern a, a', \dots , zugleich χ und Θ verschwinden, so muss, wenn die Integralsumme sich wieder auf eine Constante reduciren soll, der Quotient:

$$(x - \beta) \frac{f_1(x, y)}{\chi'y}$$

(217) für $x = \beta, y = B$ zu Null werden⁷. — Durch die vorstehende Forderung wird

⁷ABELS Bedingung lautet so: es darf $\frac{f_1(x, y)}{\chi'y}$ für $x = \beta, y = B$ nicht unendlich werden. Hier nach müsste aber z. B. an jeder Stelle, wo zugleich $\chi = 0, \Theta = 0, \chi'y = 0$ ist, f_1 verschwinden. Das wäre zuviel verlangt. — In der That rührt die Forderung ABEL's von einer ungenauen Darstellung der Function V in F. (37), (38) her, die SYLOW in den Noten zu der Ausgabe von S. und L. verbessert hat, und die auch an der Formel (69) eine Correctur nötig macht, woraus dann die obige Bedingung anstatt der von ABEL behaupteten folgt.

das Verhalten von f , in solchen Stellen regulirt, wo neben χ und Θ auch noch die partiellen Differentialquotienten von χ verschwinden; geometrisch, für solche *singuläre* Punkte der Curve $\chi = 0$, durch die $\Theta = 0$ hindurch geht. — Es mag hier ferner bemerkt werden, dass (vgl. z. B. CLEBSCH und GORDAN, Ab. F. § 13) die Forderung $\sum \psi(x) = \text{const.}$ das Integral $\psi(x)$ noch nicht zu einem Integral erster Gattung im Sinne RIEMANN's macht. Vielmehr genügen dieser Gleichung auch Integrale dritter Gattung von der Form:

$$\psi(x) = \int \frac{f_1(x, y)}{\chi'y} dx,$$

welche nur in singulären Punkten von $\chi = 0$ unendlich werden, durch die $\Theta = 0$ nicht hindurch geht. Erst die Integrale dieser Art zusammen mit den *eigentlichen* Integralen erster Gattung bilden den Inbegriff der von ABEL gefundenen linear unabhängigen Integrale $\psi(x)$, für die $\sum \psi = \text{const.}$ ist. Diese Abzählung zeigt die Vorzüge der von ABEL benutzten *Integralform*. Ohne die Annahme, dass $\chi'y$ im Nenner des Integranden auftritt, war die Zahl γ bei den erschwerenden Voraussetzungen, die hinsichtlich der Ausdrücke χ und Θ ABEL sich auferlegt, wohl nicht aufzustellen, wie auch der Umstand zeigt, dass keiner von denen, die später ABEL's Mitbewerber wurden, ohne es zu wissen, wie JÜRGENSEN, MINDING u.s.w., diese Fragestellung für den allgemeinen Fall in Angriff genommen haben, obwohl sie dieselbe kannten, weil sie unzweckmässige Integrandenformen benutzten.

12. Wie viele Integrale sind durch die anderen α mindestens mitbestimmt? Charakter der Zahl $\mu - \alpha$.

Von den μ Wertepaaren $x_i y_i$, die den Gleichungen $\Theta = 0$, $\chi = 0$ genügen, kann man so viele (α) als willkürlich gegeben annehmen, als Θ Parameter $a, a', a'' \dots$ enthält, und die übrigen $\mu - \alpha$ durch sie bestimmen (S 6). An diese Bemerkung knüpft der für die Theorie der algebraischen Functionen wichtigste Teil der Untersuchung an (§ 7), in welchem nämlich die Frage erhoben wird nach dem Grad desjenigen Factors der Resultante rx von χ und Θ , welcher die $\mu - \alpha$ durch die übrigen mitbestimmten Wertepaare $x_i y_i$ ergibt, und zwar sowohl in dem Falle, dass $F_0 x = 1$ ist, also dass α gleich der Zahl aller Coefficienten in Θ ist, als auch dann, wenn $F_0 x$ eine Function von x ist, wo dann sogar einige (A) der Factoren von $F_0 x$ durch die anderen mitbestimmt sein können. ABEL beantwortet diese Frage auf algebraischem Weg durch Substitution der Werte y in das irrationale Product:

$$r = \Theta y_1 \Theta y_2 \dots \Theta y_n,$$

indem er für $y_1 y_2 \dots$ die früher erwähnten Reihen nach absteigenden Potenzen von x (die sich aus $\chi = 0$ ergeben) einsetzt und findet, *dass im Allgemeinen der Grad $\mu - \alpha$ unter die im § 5 bestimmte Zahl γ nicht herabsinken*

kann. Durch passende Verfügung über die Grade der Coefficienten q_0, q_1, \dots, q_{n-1} in Θ lässt sich $\mu - \alpha$ **gleich** γ machen (Formel (91)). In zwei besonderen Fällen kann indessen $\mu - \alpha$ kleiner als γ werden, nämlich:

1) Wenn die Bedingungen, die den Coefficienten $a, a', a'' \dots$ in Θ aufzuerlegen sind, damit der Factor F_0x aus der Resultante rx sich ausscheidet, an Zahl kleiner sind, als der Grad von F_0x (§ 7, F. (75)), oder in geometrischer Ausdrucksweise: wenn gewisse auf der Curve $\chi = 0$ angenommene feste Schnittpunkte von $\Theta = 0$ von selbst noch andere nach sich ziehen.

2) Wenn durch passende Verfügung über einige der $a, a' \dots$ der Grad der Resultante rx um mehr Einheiten erniedrigt wird, als dadurch willkürliche Constante in Θ absorbirt werden; geometrisch: wenn mehr Schnittpunkte der Curven $\chi = 0, \Theta = 0$ im Unendlichen auftreten, als Bedingungen hierfür zu erfüllen sind.

Ist A der Ueberschuss der Schnittpunkte von $\Theta = 0$ und $\chi = 0$ über die Zahl der Bedingungen für die im Endlichen gelegenen, B für die unendlich fernen, so ist (§ 7 Formel (107)):

$$\mu - \alpha = \gamma - A - B.$$

Anmerkung: Eine Andeutung ABEL' s darüber, wie er sich denkt, dass der eine und andere der angeführten Fälle eintreten kann, findet sich nicht. SYLOW hat in den Noten zu den Oeuvres de N. H. ABEL, éd. S. et L., II S. 298) die Zahl A erklärt durch das mögliche Vorkommen von **vielfachen** Punkten der Curve $\chi = 0$ im Endlichen, die Zahl B durch das Auftreten von im Unendlichen sich berührenden Zweigen von $\chi = 0$. In der That tritt beidemal der obige Fall ein, wenn die Curve $\Theta = 0$ durch jene vielfachen Punkte geht, bzw. auch ihrerseits die betreffenden unendlichen Zweige von $\chi = 0$ berührt. Auch weist ABEL' s später zu besprechendes Beispiel (§ 10) jenes erste Vorkommnis wirklich auf.

(219) Indessen lässt sich die mögliche Differenz von γ und $\mu - \alpha$ auch noch in anderer Weise deuten. Wenn etwa an Stelle von Θ der Zähler eines Integrals erster Gattung tritt, so sind bekanntlich $p - 1$ oder weniger Schnittpunkte der Curven $\chi = 0, \Theta = 0$ durch die übrigen bestimmt, wenn p das Geschlecht von $\chi = 0$ ist (vgl. z. B. Rf. V Nr. 43). In diesem Falle unterscheiden sich also die Zahlen $\mu - \alpha (= p - 1)$ und γ um mindestens eine Einheit.

Nimmt man z. B.

$$\chi \equiv y^4 + y^2 a_2 + y b_2 + c_2, \quad \Theta \equiv y a_1 + b_1$$

an (wo die Indices den Grad in x angeben), so reducirt sich, wenn man nun a_1 durch eine Constante a_0 ersetzt, der Grad von rx um zwei Einheiten, während die Zahl der willkürlichen Coefficienten in Θ bloss um eins abnimmt.

Bei der Verallgemeinerung, die das Haupttheorem dadurch erfährt, dass etwa mehrere Schnittpunkte zusammenfallen, hält sich ABEL nicht lange auf (§9).

13. Anwendung auf den Fall, dass die Irrationalität eine n -te Wurzel ist.

Um so eingehender behandelt er (§ 10) den Fall der hyperelliptischen, oder vielmehr allgemein der binomischen Gleichungen:

$$\psi x = \int \frac{f_3 x \cdot dx}{f_2 x \cdot y^m},$$

wobei die Gleichung $\chi(x, y) = 0$ in der Gestalt $y^n + p_0 = 0$, oder ausgeführt:

$$y^n - r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} \dots r_\varepsilon^{\mu_\varepsilon} = 0,$$

angenommen wird. Hier bedeuten r_1, r_2, \dots ganze Functionen von x mit je nur verschiedenen Linearfactoren; n, μ_1, μ_2, \dots ganze positive Zahlen, $\Theta(x, y)$ hat die früher angegebene Gestalt. Diese Annahme über die ganze Function p_0 involviret — was vorher ausser Betracht geblieben war — im Endlichen gelegene vielfache Punkte der Curve $\chi = 0$ auf der X -Axe, Die Frage nach der Minimalzahl $\mu - \alpha$ von Integralen, durch welche α gegebene ausdrückbar sind, erhält durch diese Annahme ein neues Interesse; die oben mit A bezeichnete Zahl, durch die sich γ von $\mu - \alpha$ unterscheidet, muss nun genau bestimmt werden. Zu dem Zweck macht ABEL über die Form der Coefficienten q_0, q_1, \dots, q_{n-1} in $\Theta(x, y) = 0$ eine Annahme, die er zwar in keiner Weise begründet (§ 10, Formeln (142), (143)), die aber bewirkt, dass sich aus $\Theta(x, y)$, nach Substitution von $y = (-p_0)^{1/n}$, Glied für Glied eine Potenz jedes der Factoren $r_i^{1/n}$ als Factor ausscheiden lässt. Diese Potenz erreicht in Folge der Annahme mindestens die Höhe der in y^{n-1} enthaltenen ganzen Potenz von r_i . Der Erfolg ist der, dass die Zahl $\mu - \alpha$ auf denjenigen Wert herabsinkt, den man erhalten würde, wenn man (nach dem heutigen Ausdruck) die Function Θ zu „adjungirtem Verhalten“ (Rf. V, 55) in jenen singulären Stellen auf der X -Axe nötigen würde. Nur muss zugefügt werden, dass dies auch mit einem geringeren Aufwand an Bedingungen, wie die in jener Annahme enthaltenen, gelungen wäre. (220)

Die erhaltene Zahl $\mu - \alpha$ hängt bloss von der Zahl n , der Zahl der Factoren in p_0 und ihrer Vielfachheit ab und reducirt sich für den Fall hyperelliptischer Integrale, wo $n = 2, p_0$ eine ganze Function $2m$ ten oder $(2m - 1)$ ten Grades ist, auf $\mu - \alpha = m$

Mit einem diesem Fall und dem $n = 3$ entsprechenden Darstellung der logarithmischen und algebraischen Function, der die Integralsumme gleichkommt, wobei die elliptischen Integrale kurz betrachtet werden, schliesst die Abhandlung.

14. Fortschritte, die Abel's Arbeit eingeleitet hat.

Da die Pariser Abhandlung erst vierzehn Jahre nach erfolgter Vorlage der Öffentlichkeit übergeben wurde, so floss das reiche Gedankenmaterial, das sie enthält,

der Wissenschaft nur langsam zu. Zwar hatte ABEL noch kurz vor seinem Tode durch Publication der Note (2) dafür gesorgt, dass wenigstens die Grundidee seines allgemeinen Satzes nicht verloren ging; und ihre Bedeutung sogleich erkannt und in das rechte Licht gerückt zu haben ist JACOBI's bleibendes Verdienst. Aber ein grosser Teil des Inhaltes der Arbeit ist infolge jenes Umstandes nie zur verdienten Geltung gelangt. Indem wir uns zur Besprechung der Fortschritte wenden, die ABEL's Arbeit eingeleitet hat, müssen wir auch diejenigen Partien dieser Arbeit ins Auge fassen, die bei anderer Constellation der Dinge auf die Entwicklung der Wissenschaft beträchtlichen Einfluss hätten ausüben können.

Vor allem ist es ABEL's Ruhm, die Integrale mit höheren Radicanden, vor denen selbst EULER's Scharfsinn Halt gemacht hatte, in den Bereich der zugänglichen Bildungen gezogen und zu den elliptischen Functionen in so nahe Beziehung gebracht zu haben, dass ihre völlige Beherrschung bloss noch eine Frage der Zeit war. Aber sie bildeten für ABEL nur den Durchgangspunkt auf dem Wege zu einer Gattung von Integralen, an die vor ihm überhaupt noch Niemand gedacht hatte.

(221) Den Begriff des *Integrals einer algebraischen Function* hat ABEL, wie wir sahen, aus der Verallgemeinerung eines Satzes von EULER geschöpft, die ihm die Einsicht in die Theorie der Gleichungen an die Hand gegeben hatte. Für die Functionentheorie bedeutete die Conception dieses Begriffs einen beträchtlichen Zuwachs an Material und eine solche Erweiterung des Gesichtskreises, dass dem jungen Wissensgebiete, das eben **Cauchy** durch strenge Methoden begründet hatte, ein weites Arbeitsfeld und damit eine Periode kräftiger Entwicklung gesichert war.

Entsprach die Einführung dieser Transcendenten der Auffassung, die LEIBNIZ und seine Anhänger vertreten hatten, als sie die durch die Integralrechnung eingeführten neuen Functionen der besonderen Aufmerksamkeit empfahlen, so geschah dies durch ABEL doch wieder in einem Sinne, der NEWTON Recht gab, als er vor Anderen das Studium der algebraischen Gleichungen und Curven bevorzugte. Und wenn ein Begriff in der Wissenschaft erst dadurch Existenzrecht erhält, dass er mit vertrauten Begriffen in nahe Beziehung tritt, so hat den der „algebraischen Function“ nicht EULER, der bloss aus Gründen der Systematik von ihm spricht, sondern erst ABEL eingebürgert, dessen Theorem dieser Function durch Beziehungen zur Integralrechnung eine unerwartete Bedeutung verlieh, und das somit auf lange Zeit die Richtung bezeichnete, auf welcher eine Theorie der algebraischen Functionen mit Erfolg sich bewegen konnte. Manche günstige Umstände mussten freilich noch mitwirken; es bedurfte der verständnisvollen Mitarbeit des congenialen JACOBI, der scharf umgrenzenden Analyse eines WEIERSTRASS, der schöpferischen Kraft eines RIEMANN, bevor aus den Projecten ABEL's ein Wissenszweig herauswachsen konnte von dem grossen Zuschnitt der heutigen Theorie der ABEL'schen Functionen.

Hinter diesen allgemeinen Begriffsbildungen stehen die speciellen Ergebnisse der Pariser Abhandlung an Bedeutung nicht zurück, die, in die früheren Publica-

tionen nicht aufgenommen, als sie an die Oeffentlichkeit traten, keinen Interpreten mehr wie JACOBI gefunden haben. Sie sind auf diese Weise lange Zeit gänzlich unbeachtet geblieben, und haben auch heute nur noch ein historisches Interesse, nachdem sie RIEMANN wiedergefunden oder doch seiner Theorie in einem Zusammenhange einverleibt hat, der ihm das Eigentumsrecht für immer sichern wird.

15. Die Zahlen $\mu - \alpha, \gamma$ und der Geschlechtsbegriff.

Das wichtigste dieser Ergebnisse ist der oben erwähnte Satz von der Minimalzahl $\mu - \alpha$ von Integralen, auf die sich eine gegebene Anzahl α von solchen zurückführen lässt, und die wirkliche Berechnung dieser Zahl, die weder von α , noch von dem Ausdruck unter dem Integralzeichen, sondern lediglich von der Beschaffenheit der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ abhängt, durch die y als Function von x definirt ist. Es ist dieselbe Zahl, die RIEMANN als „Klassenzahl“ mit dem Zusammenhang seiner Fläche, in welcher y als eindeutige Function von x erscheint, in Verbindung gebracht hat, und die er gleich der Zahl der allenthalben endlichen Integrale findet, welche dieser Fläche zugehören. Wir werden sie in der Folge mit dem von RIEMANN eingeführten Buchstaben p bezeichnen und mit CLEBSCH das „Geschlecht“ der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ nennen. (222)

Wir haben oben eine Vermutung darüber aufgestellt, wie wohl ABEL zu dem Problem gelangt ist, eine Integralsumme durch eine andere von möglichst wenigen Integralen darzustellen und damit den Begriff des Geschlechts zu erfassen. Liegt etwas Ungewöhnliches schon in dieser Fragestellung, deren Beantwortung zudem bei ABEL's Annahme über die Gestalt der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ sehr intricate Abzählungen verlangte, so ist nicht weniger merkwürdig der Umstand, dass ABEL auch bereits die andere Definition des Geschlechtsbegriffes streift, indem er die Constantenzahl γ in demjenigen Integral ermittelt, das für die Integralsumme eine Constante ergiebt. Wenn die Curve $\chi = 0$ keine vielfachen Punkte im Endlichen besitzt, ist diese Zahl γ , wie früher gesagt, gleich derjenigen der linear unabhängigen Integrale erster Gattung. Dass in diesem Falle $\gamma = \mu - \alpha$ ist, hat ABEL selbst bemerkt. Aber im *Allgemeinen* ist ein Integral, für welches die logarithmische und algebraische Function im ABEL'schen Theorem wegfällt, keineswegs identisch mit dem Integral erster Gattung. Es blieb RIEMANN vorbehalten, mit der Bildung des überall endlichen Integrals die Theorie der ABEL'schen Functionen auch von der algebraischen Seite her zu erschliessen.

Es erübrigt noch von einigen Arbeiten ABEL's zu reden, die, theils wegen ihrer Verwandtschaft mit den oben besprochenen, theils wegen einiger neuer Fragestellungen, in der Geschichte unserer Theorie zu er wähen sind.

16. Andere Arbeiten Abel's über algebraische Integrale.

Die von BJERKNES, dem Biographen ABEL's, als „Mémoire de Freiberg“ bezeichnete Abhandlung Sur l'integration de la formule différentielle $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ (Oeuvres, éd. L. et S., I, S. 104) beschäftigte ihn zur selben Zeit, wie die über das klassische Theorem, und man hat auch eine innere Verwandtschaft zwischen dem Inhalt der beiden zu erkennen geglaubt. Die Arbeit bezieht sich auf die Frage der Reductibilität eines hyperelliptischen Integrals auf Logarithmen: ein altes Problem, dessen Lösung ABEL dadurch wesentlich fördert, dass er zeigt, dass sie an eine periodische Kettenbruchentwicklung des Wurzelausdrucks unter dem Integralzeichen als notwendige und hinreichende Bedingung geknüpft ist.

(223)

Auch die Ausdehnung **dieser** Frage auf höhere Integrale beschäftigte ABEL. In einem Brief an LEGENDRE (vom 25. Nov. 1828, Oeuvr. II, S. 271) findet sich folgende Stelle: „Ihre schönen Anwendungen der elliptischen Functionen auf die Integration von Differentialformeln haben mich veranlasst, das sehr allgemeine Problem in's Auge zu fassen:

Die Bedingung dafür zu finden, dass sich ein Integral von der Form: $\int y dx$, wo y irgend eine algebraische Function von x ist, durch algebraische und logarithmische Functionen, sowie elliptische Integrale (in endlicher Zahl) darstellen lässt. Ich bin der Lösung dieses Problems einen Schritt näher gekommen, indem ich zeigte, dass, falls eine Lösung überhaupt existirt, sie die Form annimmt:

$$\int y dx = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \dots + B_1 \Pi_2(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + \dots,$$

wo $t, t_1, t_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ rationale Functionen von x und y, Π_1, Π_2, \dots elliptische Integrale sind. Ich habe jedoch, wenn y ganz allgemein bleibt, Schwierigkeiten gefunden, die meine Kraft übersteigen, und die ich niemals bewältigen werde. Ich habe mich dann auf den Fall $y = r/\sqrt{R}$ beschränkt, wo r und R ganze Functionen von x sind“, u.s.w. In welcher Weise ABEL diese Fragestellung noch zu erweitern gedachte, lässt sich aus einem Satze des „Précis d'une théorie des fonct. ell. (Crelle J. f. M. IV, 1829; Oeuvres éd. S. et L. I, S. 549) entnehmen, welcher in sprechender Weise von der Fähigkeit ABEL's zeugt, einem Problem diejenige Seite, die einen erfolgreichen Angriff zulässt, abzugewinnen. ABEL beweist dort von einem vollständigen Differential von n Variablen, dessen Coefficienten algebraische Functionen dieser Variablen sind, während zwischen den letzteren noch algebraische Gleichungen bestehen können, dass, wenn dieses Differential durch algebraische und logarithmische Functionen und elliptische Integrale sich integrieren lässt, dies immer in der Form möglich ist:

$$t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \dots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + \dots,$$

wo $t, t_1, t_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ rationale Functionen der Variablen und der Coefficienten des Differentials sind.

Vielleicht deutet dieser Satz die Richtung an, in welcher ABEL noch eine Verallgemeinerung seines Theorems für möglich hielt.

Die ganze Reihe der erwähnten Theoreme lässt sich zurückführen auf das eine grosse Problem der „Vergleichung der Transcendenten, die als Integrale algebraischer Functionen definiert sind“, ein Problem, das ABEL die ganze Zeit seines Lebens vorgeschwebt hat, und aus dem er für die Theorie der elliptischen Integrale in dem erwähnten „Précis“ alle von ihm behandelten fundamentalen Aufgaben, wie: Reduction auf die drei Gattungen, Additionstheorem, Transformation und Multiplication u.s.w., ableitet. Auch das Theorem über die Vertauschbarkeit von Argument und Parameter bei Integralen dritter Gattung (Oeuvres éd. S. et L. Bd. I, p. 40–60, sowie hinterlassene Abhandlungen, ibd. II, p. 43; 47) ist unter diesen Gesichtspunkt einzureihen. Dieses Theorem drückt sich durch die elegante und inhaltreiche Formel aus: (224)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varphi a} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} - \sqrt{\varphi x} \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi a}} \\ &= \sum \frac{1}{2}(n-m)\alpha_{m+n-2} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{\varphi x}} \int \frac{a^m da}{\sqrt{\varphi a}}, \end{aligned}$$

wo $\varphi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$ ist, eine Formel, die später WEIERSTRASS zu Beziehungen zwischen bestimmten Integralen, deren Grenzen die Nullpunkte des Polynoms φx sind, und zu wichtigen Eigenschaften der allgemeinen Integrale geführt hat (s. unten Nr. 33). Wir müssen uns jedoch versagen, auf diese Materie, die zunächst einer Geschichte der Theorie der elliptischen Functionen angehört, einzugehen.

17. Die Formulierung des Umkehrproblems durch Abel.

Dagegen soll uns noch kurz die hinterlassene Abhandlung beschäftigen (Oeuvr. éd. S. et L. II, S. 40):

Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi x$ déterminée par l'équation:

$$fy dy - dx \sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y) \dots (a_m-y)} = 0,$$

fy étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas nulle ou infinie lorsque $y = a, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Diese Arbeit, die nach HOLMBOE's Zeugnis zu den vor ABEL's Reisen geschriebenen gehört, also vor das Jahr 1826 zu setzen ist, enthält wohl die früheste Aeusserung ABEL's über die Begriffe der Umkehrung und der Periodicität.⁸ Er zeigt dort, mit freilich bloss formalen Operationen an Reihen, in wenigen Strichen,

⁸Die erste gedruckte Aeusserung findet man in den „Recherches sur les fonctions elliptiques“, 1827. Oeuvres éd. S. et L. I, p. 264.

dass die obere Grenze y des Integrals:

$$x = \int \frac{fy \cdot dy}{\sqrt{\psi y}},$$

(225) wo ψy jenes Differenzenproduct ist, als Function des Integrals selbst betrachtet: $y = \varphi x$, die Eigenschaft hat, denselben Wert wieder anzunehmen, wenn man x um eine Grösse zunehmen lässt, deren Hälfte dem bestimmten Integral, zwischen irgend zweien der Wurzelwerte von $\psi y = 0$ genommen, gleich ist. — Indessen mögen Bedenken wegen des Convergencebereiches der benutzten Reihe, oder vielleicht ähnliche, wie sie später JACOBI bei der Umkehrung des ultraelliptischen Integrals (ψy vom fünften oder sechsten Grad) beunruhigten, überhaupt wohl die Unfertigkeit der Sache ABEL von der Publication dieses Aperçu's abgehalten haben.

Die Note ist ein Beweis dafür, wie frühzeitig die Begriffe der Umkehrung des Integrals und der Periodicität bei ABEL entwickelt waren.

Die Geschichte der elliptischen Transcendenten berichtet davon, wie unter den Händen von ABEL und JACOBI diese Gedanken zunächst in ihrer Anwendung auf elliptische Functionen sich fruchtbar erwiesen; wie ABEL auf sie die Teilung des Integrals in n gleiche Teile gründete; man kennt die denkwürdige Lösung der algebraischen Gleichung, von der das Problem der Periodenteilung abhängt. Man weiss, wie im Wettbewerb mit ABEL JACOBI seine Theorie der Transformation der elliptischen Functionen und die der Modulargleichungen schuf; wie JACOBI zur Θ -Function gelangte, die den Schlüssel zur Theorie nicht nur der elliptischen, sondern der höheren ABEL'schen Transcendenten überhaupt bildet, indem sie als drittes Glied den Cirkel schliesst, der von der elliptischen Function durch das Integral zweiter Gattung hindurch mit ihrer Hülfe wieder zu der ersteren zurückführt (JACOBI, Zur Geschichte der elliptischen und ABEL'schen Transcendenten, hinterlass. Manuscript, veröff. in JACOBI's gesammelten Werken Bd. II, herausgeg. v. WEIERSTRASS, S. 516 — 521). Die Geschichte dieser grossen Entdeckungen findet man (ausser in dem erwähnten Manuscript) in der inhaltreichen Gedächtnisrede auf JACOBI, die DIRICHLET in der Academie der Wissenschaften zu Berlin am 1. Juli 1852 gehalten hat (s. JACOBI's ges. Werke, I. Bd., herausgeg. v. BORCHARDT, S. 1 — 28), eingehender in CASORATI's Teorica delle funzioni, 1868, S. 18 ff.; in ENNEPER's Theorie und Geschichte der elliptischen Functionen (Halle, 1876, 531 SS.; 2. Aufl. herausgeg. von F. MÜLLER 1890), sowie in KÖNIGSBERGER's Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826 bis 1829 (Leipzig 1879, 104 SS.) dargestellt.

B. Ch. Jürgensen. O. J. Broch. F. Minding. G. Rosenhain. [etwa 1838–1845].

18. Arbeiten anderer Mathematiker, die gleichfalls das Thema von ABEL's Pariser Abhandlung aufnehmen.

Bevor wir von der neuen Wendung sprechen, die JACOBI der Theorie der ABEL'schen Transcendenten durch die Formulirung des Umkehrproblems gab, müssen wir von einigen Arbeiten berichten, die überhaupt nicht entstanden wären, wenn die Verfasser von ABEL's Pariser Abhandlung Kenntniss gehabt hätten, weil diese sie in jeder Hinsicht überholt hat. Das Opfer an Mühe und Scharfsinn, das sie aufgewendet haben, ist vergebens verschwendet worden, weil die damaligen Pariser Academiker nicht die Zeit gefunden haben, das unbequem geschriebene grosse Manuscript des jugendlichen Autors zu entziffern. (226)

Nachdem ABEL im 4. Bande des Crelle'schen Journals die Ausdehnung seines Theorems auf die allgemeinsten algebraischen Functionen mitgeteilt, aber das Resultat, dass die vorliegende Integralsumme auf eine logarithmische und algebraische Function der symmetrischen Functionen der oberen Grenzen zurückführbar ist, nur in grossen Zügen angegeben hatte, richtete sich die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die wirkliche Darstellung dieser Function, die in ABEL's publicirten Aufsätzen nur für hyperelliptische Integrale gebildet war, und auf die anschliessende Aufgabe, diejenigen Folgerungen, die ABEL für diesen Fall hinsichtlich der Minimalzahl von Integralen, durch die eine gegebene Integralsumme ausdrückbar ist, ausgesprochen hatte, auf den allgemeinen auszudehnen. Dieser Arbeiten hier zu gedenken ist nicht nur eine Pflicht den Autoren gegenüber, die von jener ABEL'schen Arbeit nichts wussten: der Vergleich mit dieser giebt auch einen Massstab für die Schwierigkeiten, die der Ausdehnung auf die allgemeine algebraische Function im Wege standen, und lässt deutlich diejenigen Stellen erkennen, welche die Erfindungskraft und die Geschicklichkeit ABEL's in besonderem Masse in Anspruch nahmen.

CHR. JÜRGENSEN,

- (1) Sur la sommation des transcendentes à différentielles algébriques, Journ. f. Math. XIX, S. 113–116. 1838.
- (2) Remarques générales sur les transcendentes à différentielles algébriques, Journ. f. Math. XXIII, S. 126–141. 1840.

O. J. BROCH,

- (1) Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendentes. Journ. f. Math. XX, S. 178. 1840.

- (2) Mémoire sur les fonctions de la forme etc. ibd. XXIII, S. 145–195; 201–242. 1841.

F. MINDING,

- (1) Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis e principis ABELianis derivatae, ibd. XXIII, S. 255–274. 1841.

G. ROSENHAIN,

- (1) Exercitationes analyticae in theorema ABELianum de integralibus functionum algebraicarum, ibd. XXVIII, S. 249–278, XXIX, S. 1–18. 1844. 1845.

(227)

19. Jürgensen's Darstellung der logarithmischen und algebraischen Function des Abel'schen Theorems.

Die ersten Bemühungen der Genannten galten der wirklichen Darstellung der logarithmischen und algebraischen Function im ABEL'schen Theorem. Zunächst führte diese MINDING in zwei kleineren Aufsätzen in Bd. X und XI (1833, 34) des Journ. f. Math, für solche algebraische Functionen aus, die einer Gleichung dritten Grades genügen. JÜRGENSEN wendet sich einige Jahre später in (1) der allgemeinen algebraischen Function zu, die der Gleichung:

$$Z = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \cdots + p_m = 0,$$

deren Coefficienten p ganze Functionen von x sind, genügt. Er beginnt damit, eine gebrochene irrationale Function:

$$\frac{P(x, z_1)}{Q(x, z_1)},$$

wo P, Q ganze Functionen sind, z_1 eine Wurzel von $Z = 0$ ist, in eine hinsichtlich der irrationalen Function **ganze** Form zu bringen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\lambda(x, z_1)}{\nu(x)},$$

wo λ, ν ganze Functionen der beigesetzten Variabeln sind. Dieselbe Form hatte übrigens vor ihm (Journ. f. M. X, 1833) bereits LIOUVILLE in der „Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique“ angegeben und in den Mém. prés. T. V (1838) aus den Principien der Algebra abgeleitet. JÜRGENSEN betrachtet dann eine Summe von Integralen von der Form:

$$\psi x = \int \frac{\lambda(x, z_k)}{\nu(x)} dx,$$

die Summanden geschrieben in den n Wurzeln $x = x_1, x_2 \dots x_n$ der Resultante aus Z und aus:

$$\Theta x = q_1 z^{m-1} + q_2 z^{m-2} + \dots + q_m,$$

wo die q ganze Functionen von x und irgend welche Functionen einer Grösse y sind, welche die Stelle der (veränderlichen) Parameter in der gleichnamigen Gleichung ABEL's vertritt. Indem der Verfasser gleichzeitig y variirt und die Wurzeln x_i differentiirt, gelangt er ebenso wie ABEL in der Pariser Arbeit zur gewünschten Darstellung der Integralsumme durch eine logarithmische und algebraische Function von y .

Diese Formel dehnt JÜRGENSEN in (2) auf diejenigen Fälle aus, wo der Nenner $\nu(x)$ oder die Resultante aus Z und Θ gleiche Wurzeln besitzen, und erörtert anschliessend das Theorem für die Fälle der hyperelliptischen und der elliptischen Integrale. Daneben geht er in (2) auf die von ABEL in seinen Briefen an LEGENDRE berührte Frage nach allen mittelst algebraischer und logarithmischer Functionen **ausführbaren** algebraischen Integralen ein (eine gleichfalls schon von LIOUVILLE behandelte Frage), indem er den Fall heraushebt, dass die Irrationalität die n te Wurzel aus einer ganzen Function der unabhängig Veränderlichen ist, wo dann die Form des Integrals sich wirklich angeben lässt. (228)

20. Broch stellt die Minimalzahl von Integralen, auf die eine Integralsumme reducibar ist, für einen besonderen Fall auf; Minding für den allgemeinen.

In demselben Bande des Crelle'schen Journals wie diese Arbeit von JÜRGENSEN finden sich bemerkenswerte Arbeiten von BROCH und von MINDING über denselben Gegenstand. BROCH beschränkt sich auf Integrale von der Form:

$$F(x)x^{\lambda/p}(R(x))^{s/rp} dx,$$

wo $R(x)$ ein Polynom n ten Grades ist, $F(x)$ eine rationale Function, r, s, p, λ ganze Zahlen sind, und bildet zunächst wieder die rechte Seite der Formel des ABEL'schen Theorems, indem er, um reelle Ausdrücke zu haben, neben den logarithmischen auch cyclometrische Functionen heranzieht. Aber es ist bemerkenswert, dass BROCH auch auf jene Frage eingeht, die ABEL im III. Bande des Crelle'schen Journals bloss für hyperelliptische Integrale behandelt hatte, die Frage nämlich nach der Minimalzahl von Integralen, durch die, abgesehen von einer logarithmischen und algebraischen Function, eine vorliegende Integralsumme sich darstellen lässt. Er findet, in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen von ABEL's Pariser Arbeit, diese Zahl gleich:

$$\frac{1}{2}[m(rp - 1) - r - b + 2],$$

wo b der grösste gemeinsame Teiler von $m - r$ und rp ist.

Umfassender noch ist der Gesichtskreis der gleichzeitigen MINDING'schen Arbeit, die nach Form und Inhalt sogar viele Aehnlichkeit mit der Pariser Abhandlung von ABEL besitzt. Wie diese bezieht sie sich auf den Fall einer allgemeinen algebraischen Function y von x , definirt durch die Gleichung:

$$\chi(x, y) \equiv y^n p_0 + y^{n-1} p_1 + \dots + p_n = 0,$$

wo die p_i , **einschliesslich** p_0 , (bei ABEL = 1 gesetzt) ganze Functionen von x bedeuten. Dass MINDING p_0 nicht gleich 1 annimmt, während doch durch die Substitution $yp_0 = z$ diese Form leicht zu beschaffen wäre, begründet er damit, „dass dann die Coefficienten der niederen Potenzen von z eine specielle Form annehmen würden, die für die vorliegende Frage nicht ohne Gewicht wäre“.

Das betrachtete Integral hat, während bei ABEL noch $\chi'(y)$ im Nenner des Integranden steht, die folgende (nicht weniger allgemeine) Gestalt:

$$\int \frac{\varphi_0(x) F(x, yp_0) dx}{\varphi(x)},$$

(229) wo $\varphi_0(x)$ und $\varphi(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_r)$ ganze Functionen von x , F eine ganze Function von x und $p_0 y$ ist. Die neben $\chi(x, y) = 0$ bestehende Gleichung lautet:

$$\psi(x, y) = q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \dots + q_n = 0.$$

Die μ gemeinsamen Wurzelpaare von $\chi = 0$ und $\psi = 0$ werden bei MINDING **alle** als mit den Coefficienten der q_i veränderlich angenommen (während ABEL auch feste Schnittpunkte der Curven $\chi = 0, \psi = 0$ zulässt). Hat die Resultante $f(x)$ aus χ und ψ die μ Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_μ , so erhält nach MINDING die algebraische und logarithmische Function in der Gleichung des ABEL'schen Theorems die folgende (bereits, wie erwähnt, von JÜRGENSEN angegebene) Form:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \int \frac{\varphi_0 x_i \cdot F(x_i, y_i)}{\varphi x_i} = \frac{\varphi_0 c_1}{\varphi' c_1} \int \frac{\Theta c_1}{f c_1} + \frac{\varphi_0 c_r}{\varphi' c_r} \int \frac{\Theta c_r}{f c_r} - \left[\frac{\varphi_0 x}{\varphi x} \int \frac{\Theta c}{f x} \right]_{1/x},$$

wo:

$$\Theta x = f x \cdot \sum_1^n \frac{F(x, y_i) \delta \psi_i}{\psi_i}$$

eine ganze Function von x ist, die Integrationen rechts sich über die Variationen der Coefficienten $\delta \psi$ der $q_1, q_2 \dots$ erstrecken, und der letzte Ausdruck rechts den Coefficienten der (-1) ten Potenz in der Entwicklung des Klammerausdrucks nach negativen Potenzen von x bezeichnet.

Diese Formel steht an Allgemeinheit hinter der von ABEL angegebenen nur hinsichtlich jener Annahme über die Beweglichkeit der Schnittpunkte von $\chi = 0, \psi = 0$ zurück.

21. Minding's Classificirung der Potenzentwicklungen an einer unendlich fernen Stelle.

Aber auch die Frage der Reduction einer Integralsumme auf eine Minimalzahl greift MINDING an, wohl angeregt durch die Bemerkung ABEL's (Nr. 8, (3), Einleitung), dass die von ihm für die hyperelliptischen Integrale bewerkstelligte Reduction allgemein möglich sei. Er findet hierbei genau die von ABEL aufgestellte Formel (für $\mu - \alpha$, s. No. 12); rechts indessen noch vermehrt um ein von dem Coefficienten p_0 herrührendes Glied $(n - 1)\delta p_0$, wo δp_0 der Grad von p_0 in x ist. Wir bemerken vorgreifend, dass in dieser Formel der RIEMANN'sche Ausdruck für das Geschlecht: $(m - 1)(n - 1)$ mit unterbegriffen ist, während die ABEL'sche Formel bloss jenen von CLEBSCH: $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ umfasst. Die durch im *Endlichen* gelegene singuläre Punkte des Gebildes $\chi = 0$ eintretende Reduction berührt MINDING nicht, wie ja auch ABEL im allgemeinen Falle nicht näher auf sie eingeht. Der Beweis für die angegebene Formel ist wie bei ABEL rein algebraisch. MINDING zeigt, dass, welches auch die Zahl α der Summanden ist, man immer die Anzahl $\mu - \alpha$ der durch sie mitbestimmten auf eine von α unabhängige Zahl reduciren kann, indem man den Grad der einzelnen Coefficienten q_i in $\psi(x, y)$ hinsichtlich x passend bestimmt. (230)

Er bedient sich zu dem Zweck der Methode der Reihenentwicklung von y nach absteigenden Potenzen von x — genau so wie ABEL — und setzt bei dieser Gelegenheit auseinander, wie man die Exponenten der ersten Coefficienten dieser Entwicklungen aus der vorliegenden Gleichung $\chi(x, y) = 0$ findet. Das Verfahren — eine analytische Formulirung desselben Gedankengangs, welchen später (1852) PUISEUX für die im Endlichen gelegenen Singularitäten einer Curve an das NEWTON'sche Parallelogramm angeschlossen hat — führt ihn, für die von ihm allein betrachteten Singularitäten im *Unendlichen*, zu der bemerkenswerten Einteilung der Entwicklungen in *Klassen*, die geometrisch zu reden, den einzelnen Seiten des Polygons auf dem Parallelogramm entsprechen. Wenn auch MINDING seine Methode auf die im Endlichen gelegenen Singularitäten nicht anwendet, so ist doch der Gedankengang und das Ergebnis von dem PUISEUX'schen so wenig verschieden, dass man die Priorität desselben für MINDING reclamiren kann.

Bei diesem Anlass möge einschaltungsweise von der Note: Ueber die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung (Journ. f. Math. Bd. 22, S. 178–183) berichtet werden, die MINDING dem hier besprochenen Aufsatz vorausgeschickt hat. Er zeigt, wie LIOUVILLE in seinem Journal de Math. VI, dass man den Grad der Resultante aus zwei Gleichungen in x und y (ganze Functionen gleich Null) hinsichtlich x bestimmt, indem man die Wurzeln y der einen nach absteigenden Potenzen von x entwickelt und diese Entwicklungen in die irrationale Form der Resultante einsetzt. Der gesuchte Grad der Resultante setzt sich dann aus den Graden der höchsten Exponenten in x der irrationalen Factoren und einem Vielfachen des Grades der anderen Gleichung zusammen. Auf diese Weise werden die unendlich fernen Schnittpunkte zweier Curven aus

der Gradberechnung ausgeschieden.

Dass für gewisse typische Fälle diese Bestimmung schon BÉZOUT vorgenommen hatte, scheint MINDING nicht bemerkt zu haben.

Indem wir uns wieder zu MINDING's Abhandlung (1) zurückwenden, berichten wir noch über eine Anwendung seiner allgemeinen Methode auf einen wichtigen Sonderfall.

(231) **22. Vergleichung der Ergebnisse von Minding und Abel.**

Ganz wie ABEL geht nämlich MINDING noch auf den Fall der Gleichung $p_0y^n + p_n = 0$ ein und zwar mit der Frage (ABEL hat sie für den allgemeinen Fall beantwortet) nach der Zahl (bei ABEL γ) der linear unabhängigen Integrale, welche die Eigenschaft haben, dass die Integralsumme des Theorems eine Constante ergibt. Er findet — analog dem ihm bekannten Ergebnisse ABEL's für hyperelliptische Integrale — diese Zahl gleich der Minimalzahl von Integralen, auf die eine gegebene Summe reducirt ist. Mit Recht führt MINDING den inneren Grund dieser merkwürdigen Uebereinstimmung darauf zurück, dass die Gleichung für die Integralsumme, wenn das Integral γ lineare Constanten besitzt, sich in γ Gleichungen spaltet, welche nach dem JACOBI'schen Umkehrproblem (s. unten) γ obere Grenzen in der Integralsumme durch die übrigen auszudrücken gestatten. — Weil indessen MINDING, wie oben erwähnt, feste Schnittpunkte der Curven $\chi = 0$, $\varphi = 0$ ausschliesst, so entgeht ihm wieder die wichtige Bemerkung von ABEL, dass jene Minimalzahl γ im vorliegenden Fall, wo $p_0y^n + p_n = 0$ noch vielfache Punkte im Endlichen besitzen kann, durch passende Annahme der Curve $\psi = 0$ (nämlich, in der heutigen Ausdrucksweise, bei adjungirtem Verhalten in jenen Punkten) noch unter die für den allgemeinen Fall angegebene Grenze herabgedrückt werden kann. — Steht somit MINDING's Arbeit, die ihre Probleme durchaus den publicirten Abhandlungen ABEL's entnimmt, auch hinsichtlich der Allgemeinheit der Resultate hinter ABEL's Pariser Arbeit zurück, so ist doch erstaunlich, wie tief der geistvolle Verfasser in ABEL's Gedankengang und den Kreis seiner Hilfsmittel eingedrungen ist, und wie viele wesentliche Ergebnisse ABEL's er — in gewissem Sinne — anticipirt hat; auch ist zuzugeben, dass in Bezug auf Durchsichtigkeit, Kürze und zweckmässige Anordnung der Beweisführung die Arbeit hinter der ABEL's nicht zurücksteht.

23. Rosenhain's Form des Integranden einer algebraischen Function.

Während die Arbeiten von BROCH und MINDING in demjenigen Jahr erschienen sind, in welchem ABEL's Arbeit endlich veröffentlicht wurde, publicirte ROSENHAIN drei Jahre später eine solche über den gleichen Gegenstand, ohne einer dieser Abhandlungen zu gedenken. Er setzt in der Vorrede auseinander, dass es

zweckmässig sei, die Function unter dem Integralzeichen in die (auch von ABEL benutzte) Form:

$$\frac{Q(x, y)}{\chi'(y)} \quad (1)$$

zu setzen, wenn wieder $\chi(x, y) = 0$ die gegebene Gleichung vom n . Grad in y ist, und Q eine rationale Function in x , eine ganze in y vom Grad $n - 2$ ist. Diese Form, welche bekanntlich den Vorteil hat, dass der Zähler Q von den durch Bevorzugung der Variabeln x ausgezeichneten Stellen des Bruches unabhängig ist, und die damit die Aufstellung des Integranden erster Gattung wesentlich erleichtert (s. oben ABEL, Nr. 11), entnimmt ROSENHAIN derjenigen Verallgemeinerung, die JACOBI den hyperelliptischen Integralen gegeben hatte, indem er statt des Wurzelausdruckes aus $y^2 = R(x)$ eine trinomische quadratische Gleichung zu Grund legt. (232)

Er verspricht dann zu zeigen, dass die Gleichheit jener beiden Zahlen: der Zahl der Constanten in einem Integral erster Gattung und der Minimalzahl von Integralen, auf die eine gegebene Integralsumme zurückführbar ist, auch im Falle des allgemeinen algebraischen Integrals noch besteht. Aber sowenig wie seine Vorgänger kennt ROSENHAIN den Begriff des allenthalben endlichen Integrals. Er löst sein Versprechen nicht einmal ein unter den vereinfachenden Annahmen, die MINDING gemacht hatte; wohl weil der von ihm eingeschlagene Weg der Reduction des *einzelnen* Integrals auf die drei Hauptgattungen, den LEGENDRE für das elliptische Integral und später WEIERSTRASS für den hyperelliptischen Fall betreten konnten, wo sich diese Gattungen noch leicht definiren lassen, für die damalige Zeit noch zu schwer war.

24. Weitere Ergebnisse der Rosenhain'schen Arbeit über Abel's Theorem.

Von Ergebnissen der ROSENHAIN'schen Arbeit erwähnen wir:

- α) Die Aufstellung- eines linearen Gleichungssystems (§ 10), durch welches die Form 1) mit Hülfe von $\chi(x, y) = 0$ in eine ganze Function $(n - 1)$ ten Grades in y , mit in x rationalen Coefficienten, übergeführt wird. Hierzu dienen ihm jene BÉZOUT'schen $n - 1$ ganzen Functionen einer gemeinsamen Wurzel von $\chi(y)$ und $\chi'(y)$, oder besser von $n\chi - y\chi'$ und χ' ; er benutzt diesen Anlass, um überhaupt dieses Eliminationsverfahren auf zwei Gleichungen verschieden hohen Grades anzuwenden, indem er den hierbei auftretenden uneigentlichen Factor der Resultante bestimmt.
- β) ROSENHAIN bildet ferner gewisse Coefficienten N_k , die in einer Gleichung auftreten von der Form:

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \left(p_0 y^i + p_1 y^{i-1} + \cdots + p_{i-1} y + \frac{i}{n} p_i \right) = \frac{1}{\chi'(y)} \sum_{k=1}^{n-1} N_k y^{n-k-1},$$

wo die B_i gegebene rationale Functionen von x sind, y wieder eine Wurzel der Gleichung:

$$\chi(x, y) \equiv p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

für ein unbestimmtes x ist (§ 4).

- (233) $\gamma)$ Indem ROSENHAIN nun die B_i alle als ganze Functionen gleich hoher Ordnung ansieht, und die Coefficienten derselben so bestimmt, dass alle N_k rechts bis auf eines verschwinden (§ 11), erhält er eine Reductionsformel, vermöge deren ein Integral von der Form:

$$\int \frac{x^{\nu_\alpha + m} y^{n-\alpha-1}}{\chi'(y)} dx,$$

(wo m, α ganze Zahlen, ν_α eine von α abhängige Zahl ist), abgesehen von einer rationalen Function von x und y , auf ein solches zurückkommt, in dessen Zähler an Stelle von $x^{\nu_\alpha + m}$ eine ganze Function $M(x)$ von niedrigerem Grad als ν_α steht. — Aber die Bedingung für die Coefficienten ν_α sind zu complicirt, es existiren ausserdem nicht näher erörterte Ausnahmefälle, so dass ROSENHAIN zu einem Ueberblick über die irreductibeln Integrale nicht gelangt. — Er hätte eben den Grad hinsichtlich y des Integrals, auf das er reducirt, nicht im Voraus fixiren dürfen. So kommt es, dass er das gesteckte Ziel: die linear unabhängigen Integrale der Form 1) zu finden, nicht erreicht.

Die Frage war durch die inzwischen bekannt gewordene ABEL'sche Arbeit an der Hand des ABEL'schen Theorems im Wesentlichen beantwortet, wenn auch nicht auf dem ROSENHAIN'schen Wege der Reduction des **einzelnen** Integrals, ein Weg, den lange nachher erst CLEBSCH und GORDAN mit Erfolg betreten haben. Sie waren freilich ihres Ergebnisses sicher, nachdem RIEMANN die drei Gattungen von Integralen bereits unterschieden und namentlich für den Integranden erster Gattung die Grundlage geschaffen hatte, die den Fortschritt der ganzen Theorie bedingt hat.

25. Rückblick auf Abel und dessen nächste Nachfolger.

Ein Rückblick auf die besprochene Gruppe von Arbeiten zeigt, dass nur MINDING in ABEL's Gedankengang tiefer eingedrungen war. Wie ABEL, besitzt er im Wesentlichen den Geschlechtsbegriff, indem er die Gleichung $\Theta(x, y) = 0$, welche neben der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ des gegebenen algebraischen Gebildes besteht, zu adjungirtem Verhalten in den unendlich singulären Stellen von $\chi = 0$ nötigt und so die Minimalzahl der Integrale bestimmt, auf die eine gegebene Integralsumme vermöge des ABEL'schen Theorems reducirbar ist. Dagegen gelingt es auch ihm nicht, jene andere Zahl zu bestimmen, die in vielen Fällen jener gleich ist, die Zahl nämlich der willkürlichen Constanten in einem Integral,

für welches das ABEL'sche Theorem als Wert der Integralsumme, ausgedehnt über alle Schnittpunkte einer beliebigen Curve $\Theta = 0$ mit $\chi = 0$, eine Constante ergibt. MINDING muss sich hierbei auf den Fall der binomischen Gleichung $\chi(x, y) = y^n p_0 + p_n = 0$ beschränken. Dass weder ABEL noch einer der Späteren bis RIEMANN den Begriff des Geschlechtes in *voller* Schärfe erfasst hat, liegt daran, dass man nach der einen Seite in der Verallgemeinerung zu weit ging, nach der anderen nicht weit genug. Zu weit in der Annahme der zu Grunde gelegten Gleichungsform $\chi(x, y) = 0$ hinsichtlich ihres Verhaltens im *Unendlichen*, indem ohne wesentliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit die hohen Singularitäten in den Punkten $x = \infty, y = \infty$ die den Ueberblick erschweren und grosse Rechnungen verlangen, hätten wegfallen können, oder doch durch vielfache Punkte ohne superlineare Zweige hätten ersetzt werden können. Nicht weit genug in der Annahme des Verhaltens von $\chi = 0$ im Endlichen, wo im allgemeinen Falle schon vielfache oder doch Doppelpunkte in unbestimmter Anzahl hätten angenommen werden müssen. So kommt es, dass die Forderung des adjungirten Verhaltens der Gleichung $\Theta(x, y) = 0$ in den singulären Stellen von $\chi = 0$ überhaupt nicht, oder — wie bei ABEL und MINDING — nur in impliciter Form (für die unendlich fernen singulären Stellen oder an Beispielen) zur Geltung kam. (234)

Was dieser ganzen Richtung fehlte, war zunächst der Begriff der mehrfach periodischen Function, dann die inzwischen von der französischen Schule entwickelte allgemeine Theorie der algebraischen Function. Der letzte Punkt ist oben besprochen worden. Was den ersten angeht, so haben wir zunächst über JACOBI's Formulirung des Umkehrproblems und über dessen Lösung nachträglich zu berichten.

C. Carl Gustav Johann Jacobi [1832–1834].

- (1) Considerationes generales de transcendentibus ABELianis, Crelle's J. f. M. IX, 1832, ges. Werke II ed. WEIERSTRASS, S. 7–16.
- (2) De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium ABELianarum innititur, ibd. XIII, 1834, ges. Werke II, S. 25–50.

26. Das Umkehrproblem der ultraelliptischen Functionen.

Nachdem der Gedanke der Umkehrung des Integrals in der Theorie der elliptischen Transcendenten so reiche Früchte gezeitigt hatte, lag es nahe, ihn auch auf die Integrale mit Radicanden von höherem Grade als dem vierten anzuwenden. Aber schon im Falle der „ultraelliptischen“ Integrale, wo nämlich der Wurzel-ausdruck vom fünften oder sechsten Grad ist, versagte merkwürdiger Weise der

(235) Versuch. So wenigstens, wie ABEL in jener hinterlassenen Abhandlung (s. oben Nr. 17) sich die Umkehrung gedacht hatte, war sie sicher nicht möglich, wenn anders die obere Grenze des Integrals nicht eine unendlich-vieldeutige (Rf. II Nr. 19), oder, wie sich JACOBI gesprächsweise ausgedrückt hat, eine „vernünftige Function“ des Integralwertes selbst sein sollte. Denn (2) das ultraelliptische Integral besitzt vier linear unabhängige Perioden, die im Allgemeinen sich als complexe Größen darstellen. Da man aber durch Multiplication von solchen vier Größen mit passend gewählten ganzzahligen Factoren und Addition jede beliebig complexe Grösse mit beliebigem Grade der Annäherung darstellen kann, so könnte man ohne Aenderung der oberen Grenze den Integralwert selbst jeder Grösse beliebig nahe bringen, und damit wäre, wenigstens in dem geläufigen Sinn, von einem Abhängigkeitsverhältnis zwischen Integral und oberer Grenze nicht mehr die Rede. Und doch musste eine Verallgemeinerung des Umkehrproblems existiren. — Lange hatte JACOBI einer Lösung dieses Widerspruchs nachgesonnen. Da gab ihm „in hac quasi desparatione“ das ABEL'sche Theorem selbst den Schlüssel an die Hand. In (1) erinnert JACOBI daran, dass nach diesem Theorem im Falle, dass X eine ganze Function fünften oder sechsten Grades von x ist, eine Anzahl, z.B. drei Integrale von der Form:

$$\int \frac{A + A_1x}{\sqrt{X}} dx,$$

zwei andere mitbestimmen. Weil aber die Coefficienten A, A_1 willkürliche Größen sind, so zerfällt auch die **Gleichung** des Theorems genau besehen in **zwei** von einander unabhängige, die, wenn:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi x; \quad \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1 x$$

gesetzt wird, so lauten:

$$\begin{aligned} \Phi a + \Phi b &= \Phi x + \Phi y + \Phi z \\ \Phi_1 a + \Phi_1 b &= \Phi_1 x + \Phi_1 y + \Phi_1 z, \end{aligned}$$

wo sich nun a, b aus den gegebenen Größen x, y, z algebraisch berechnen lassen.

Diese Auffassung des Theorems wies darauf hin, dass man auch das Umkehrproblem an zwei **simultane** Gleichungen anknüpfen müsse. In der That verschwinden sofort die erhobenen Bedenken, wenn man verlangt: die durch die transcendenten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi x + \Phi y &= u \\ \Phi_1 x + \Phi_1 y &= v \end{aligned}$$

gegebenen Größen x, y als Wurzeln einer quadratischen Gleichung darzustellen, deren Coefficienten (transcendente aber eindeutige) Functionen von u, v sind.

(236) Denn wenn alsdann $x = \lambda(u, v)$; $y = \lambda_1(u, v)$ als Functionen von u, v defnirt sind, so geben die Periodenvielfachen, welche zu u hinzutreten, zu Periodenvielfachen auch von v Veranlassung, die in **derselben** Vielfachheit auftreten, wie bei u , so dass also eine willkürliche Abänderung des einen Arguments eine unfreiwillige des anderen nach sich zieht.

Das Additionstheorem der ultraelliptischen Functionen lautet in in dieser Auffassung einfach so:

Die Functionen $\lambda(u+u_1, v+v_1)$ und $\lambda_1(u+u_1, v+v_1)$ lassen sich als algebraische Functionen von $\lambda(u, v)$; $\lambda(u_1, v_1)$; $\lambda_1(u, v)$; $\lambda_1(u_1, v_1)$ ausdrücken.

„In diesem Princip der simultanen Periodicität liegt die **Lösung** des Paradoxons, welches die durch die vierfache Periodicität entstehende Unbestimmtheit darbietet“ (JACOBI, Abriss der Geschichte der elliptischen u.s.w. Transcendenten, Ges. Werke II, S. 517).

Hiermit war das **Problem** der Umkehrung der ultraelliptischen Functionen gestellt. Um es zu lösen, bedurfte es jüngerer Kräfte. GÖPEL und ROSENHAIN fanden in der Verallgemeinerung der elliptischen Θ -Function das Mittel, um die Coefficienten jener quadratischen Gleichung, deren Wurzeln die oberen Grenzen x, y sind, als Function der Integralsummen u, v darzustellen.

Ueber die Arbeiten JACOBI's zur Theorie der Elimination und andere hierher gehörige werden wir an späterer Stelle (Rf. V Nr. 2 ff.) berichten.

D. Adolph Göpel und Georg Rosenhain [1844–1847].

- (1) A. GÖPEL, Theoriae transcendentium ABELianarum primi ordinis adumbratio levis. Crelle's Journ. f. Math. XXXV, S. 277; 1847.
- (2) Auszug mehrerer Schreiben des Dr. ROSENHAIN an Herrn Prof. JACOBI über die hyperelliptischen Transcendenten, Crelle's Journ. f. M. XL, S. 319. 1844–49.
- (3) G. ROSENHAIN, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe, Mém. sav. étrang. XI, 1851.

27. Göpel's ultraelliptische Thetafunction; Differentiation der Thetarelationen.

Der nächste Fortschritt in der Theorie der ABEL'schen Functionen bestand in der Lösung des Umkehrproblems der „ultraelliptischen“ Integrale (für welche nach Nr. 26 der Ausdruck X, Y unter dem Wurzelzeichen vom fünften oder sechsten Grade ist; für die „hyperelliptischen“ steigt er bis zu unbestimmtem höherem Grade

(237) an). Diese Lösung erfolgte durch eine Art Divination hinsichtlich der Form der Reihe, die der von JACOBI in die Theorie der elliptischen Functionen eingeführten Transcendenten Θ analog gebildet ist, die aber von zwei Argumenten u, v abhängt. Durch sie mussten die Coefficienten jener quadratischen Gleichung, der die oberen Grenzen x, y der Integrale:

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} \\ v &= \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{y dy}{\sqrt{Y}} \end{aligned}$$

genügen, sich, ausdrücken lassen.

Als HERMITE in seinem Briefe an JACOBI vom August 1844 (Crelle's Journal f. Math. Bd. 32, 1846, JACOBI's Werke Bd. II, S. 106) die Reihe für die elliptische Theta-Function in der Form darstellte:

$$\Theta(u) = e^{-au^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a(u+bn)^2},$$

war er der gewünschten Verallgemeinerung bereits so nahe, dass GÖPEL es für angezeigt hielt, mit den Ergebnissen seiner langjährigen Untersuchungen über das ultraelliptische Umkehrproblem hervortreten. Er legt ihnen (1) die folgende Form der neuen (hyperelliptischen) Theta-Function zu Grunde:

$$\Theta(u, v) = e^{-au^2 - a'v^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{a(u+bn+cm)^2 + a'(v+b'n+c'm)^2},$$

der er 15 ähnlich gebildete Reihen an die Seite stellt. Quadrirt man diese Reihen, so erhält man Relationen zwischen den 16 Thetafunctionen, unter anderen eine biquadratische zwischen vieren P', S', P'', S'' von ihnen. GÖPEL bildet die Differentialien $P' dS' - S' dP'$ und $P'' dS'' - S'' dP''$ und stellt vermöge jener Relationen die Reihen, die hier als Coefficienten von du und dv auftreten, wiederum als homogene Functionen dieser 4 Theta's dar. Verwendet man nun die Quotienten $P'/S' = p$, $P''/S'' = q$ (vierfach periodische Functionen, wie sie schon JACOBI eingeführt hatte), so erhält man, vermöge der letzterwähnten Gleichungen, für du und dv vollständige Differentiale von der Form $P dp + Q dq$. Es gelingt GÖPEL, statt p, q zwei neue Variable x, y so zu bestimmen, dass diese Differentiale in die separirte Form der Summe von zwei hyperelliptischen Integralen übergehen. — „Meisterhaft ist die Art, wie er, ungeschreckt von der Complication jener Differentialgleichungen, dies ausführt“ (JACOBI). Mit diesem Uebergang von der Thetafunction zu den Gleichungen des Umkehrproblems sind aber die gewünschten endlichen Gleichungen zwischen x, y und u, v gefunden.

GÖPEL's Arbeit erschien erst nach seinem Tode. In dem Nachruf, den ihm JACOBI im Anschluss an die Arbeit (1) (JACOBI's Werke II, S. 147) widmete,

(238) wird erwähnt, dass dieselbe im März 1847 zum Druck übergeben worden ist. Schon im Jahre 1846 hatte inzwischen ROSENHAIN der Pariser Academie eine Preisschrift über denselben Gegenstand vorgelegt, deren wesentlichen Inhalt er bereits 1844 bis 1847 in drei Briefen an JACOBI (2) mitgeteilt hatte, und die ebenfalls mit glücklichem Erfolg die Frage der Umkehrung hyperelliptischer Integrale behandelt.

28. Rosenhain's Relationen für vier Argumente; Uebergang zu den Differentialformeln des Umkehrproblems.

Den Ausgangspunkt für ROSENHAIN bilden die dreifach periodischen Functionen, die bei der Umkehrung des simultanen Gleichungssystems auftreten, wenn die Summe von zwei elliptischen Integralen erster Gattung und die von zweien dritter Gattung vorliegt ((3) Chap. I, 5), ein Problem, das noch mittelst *elliptischer* Thetafunctionen gelöst werden kann. ROSENHAIN versuchte nun, aus diesen dreifach periodischen Thetafunctionen in derselben Weise Reihen zusammensetzen, wie sich die elliptischen Thetareihen durch einfach periodische darstellen ((2) I). Er gelangte so zu Doppelreihen, von denen eine in der Form erschien:

$$\Theta(u.v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2a+n^2b+2mnc+2mu+2nv},$$

aus denen sich 15 andere durch Vermehrung der Argumente um halbe Vielfache der Perioden ableiten liessen. Aehnlich, wie JACOBI Relationen zwischen elliptischen Thetafunctionen von 4 verschiedenen Argumenten und anderen Thetafunctionen gebildet hatte, deren 4 Argumente aus Summe und Differenz dieser vier bestehen, Relationen, die sich aus Producten von je 4 gleichartigen Thetafunctionen zusammensetzen, stellte ROSENHAIN Relationen von gleicher Beschaffenheit zwischen seinen hyperelliptischen Thetafunctionen her und gelangte durch Specialisirung der vier willkürlichen Argumentenpaare zu Beziehungen zwischen Thetaquotienten mit *demselden* Argumentenpaar, vermöge deren alle durch *zwei* von ihnen sich darstellen lassen oder vielmehr durch zwei Grössen x und y , deren Product gleich dem Quadrat eines der Thetaquotienten ist, während gewisse andere symmetrische Functionen gleich ebensolchen Quotienten mit demselben Nenner sind. Eine andere Specialisirung führt ihn auf das *Additionstheorem* der hyperelliptischen Theta's, einer Beziehung zwischen Theta's mit zwei verschiedenen Argumentenpaaren $u, v; u', v'$ und denjenigen, deren Argumente aus der Summe und der Differenz derselben bestehen. Differentiirt man diese Relation nach dem einen Variabelnpaar u', v' , das man dann gleich Null setzt, so erhält man die partiellen Differentialquotienten nach dem anderen u, v , ausgedrückt durch Thetaproducte desselben Argumentenpaares und, indem man denselben Process an einer analogen Relation für andere Theta's ausführt, du und dv durch zwei

(239)

Relationen mit den Differentialien dx und dy jener beiden Grössen x und y verbunden, durch welche alle Thetaquotienten sich ausdrücken lassen. Dies aber ist eben die gewünschte Integralbeziehung, die eigentlich den Ausgangspunkt der Problemstellung bilden sollte.

Die Wahl der beiden Grössen x, y als Parameter für die Darstellung aller Quadrate der Thetaquotienten mit *demselben* Nenner ist eine glückliche zu nennen, denn sie erspart ROSENHAIN den Durchgang durch die nicht separirte Form der Differentialgleichung, die GÖPEL's Arbeit erschwerte. Er gelangt sogleich zu den gewünschten — oder genauer gesagt, zu linear aus diesen zusammengesetzten — Gleichungen, die er nicht direct verificirt. — Um nicht zu weit von unserem Thema abzuschweifen, haben wir den Bericht über diese Arbeiten kürzer gefasst, als es die Wichtigkeit des Gegenstandes vielleicht erfordert hätte; auch müssen wir uns versagen, auf andere Punkte aus der Theorie der ultraelliptischen Functionen, welche GÖPEL und ROSENHAIN berühren, Beziehungen zwischen den bestimmten Integralen, die Theorie der Transformation u.s.w., hier einzugehen.

E. Karl Weierstrass [1848–1856].

- (1) Beitrag zur Theorie der ABEL'schen Integrale, Prgr. d. Braunsberger Gymnasium's für 1848/9 (20 S.), dat. 17. Juli 1849.
- (2) Zur Theorie der ABEL'schen Functionen, Crelle's Journ. f. M. XLVII, S. 289–306. 1853.
- (3) Theorie der ABEL'schen Functionen, ebd. LII, S. 285–380. 1856.

29. Uebersicht über Weierstrass' ältere Arbeiten über das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale.

Die Abhandlungen (1) bis (3) beziehen sich auf das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale — die WEIERSTRASS'sche Bezeichnung: „ABEL'sche Integrale“ behalten wir uns, nach dem jetzt üblichen Sprachgebrauche, für die Integrale allgemeiner algebraischer Functionen vor —, also solcher Integrale, deren Irrationalität in einem Quadratwurzel-Ausdruck $(2\rho + 1)$ ten Grades besteht. Der Weg, den WEIERSTRASS einschlägt, ist gänzlich verschieden von dem, den GÖPEL und ROSENHAIN für den Fall $\rho = 2$ mit Erfolg betreten hatten. Während diese von dem eigentlichen Ziele der Untersuchung, von der Thetafunction, ausgehen und, rückwärtsschreitend, durch Differentiation von Thetarelationen zeigen, dass die Lösung des Problems von dieser Transcendenten allein abhängt, geht WEIERSTRASS, der Natur der Aufgabe folgend, von den gegebenen Differentialgleichungen aus und bahnt sich von da den Weg zur Thetafunction.

(240)

Die Programmschrift (1) beschränkt sich auf einen in sich abgeschlossenen Teil der Theorie: die Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale;

(2) enthält eine vorläufige Ankündigung des Gesamtinhaltes von WEIERSTRASS' Theorie nebst Andeutung der Beweise; (3) einen ersten Teil der Ausführung. Eine Fortsetzung von (3) ist nicht erschienen. Wohl aber geben die Vorlesungen, die WEIERSTRASS an der Universität zu Berlin gehalten hat, die allgemeine Theorie der ABEL'schen Integrale auf gleicher Grundlage, auf der jene ersten Arbeiten beruhen. Wir werden hierüber später zu berichten haben. Einen Einblick in die eigenartigen Hilfsmittel, mit denen WEIERSTRASS das Problem angreift, und die Methoden, die auch seinen späteren Untersuchungen zu Grunde liegen, gewährt die Ausführung über die *elliptischen* Transcendenten in (3), von der wir deshalb zunächst reden wollen.

30. Formulierung des Grundgedankens dieser Arbeiten im Falle des elliptischen Integrals.

Abweichend von der JACOBI'schen Theorie der elliptischen Functionen, die durchaus an *reelle* Beziehungen anknüpft, stellt sich WEIERSTRASS, angeregt durch eine kurze Bemerkung ABEL's in einem Briefe an LEGENDRE (Crelle's Journ. f. M. VI, S. 76, Werke ed. S. et L. II, S. 274) die Aufgabe, die Theorie an diejenigen Potenzentwicklungen anzuknüpfen, welche sich aus der Differentialgleichung:

$$du = \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}$$

für die Wurzelgrößen $\sqrt{x-a_i}$ nach Potenzen der complexen Grösse u ableiten lassen. Diese Reihen definiren die Wurzelgrößen zunächst nur für einen beschränkten Bereich der Ebene. Aber vermöge des Additions-(ABEL'schen) Theorems lassen sich die elliptischen Functionen $\sqrt{x-a_i}$ von u rational durch ebensolche Functionen, nur geschrieben für das Argument $u/2$, ausdrücken und somit nach ganzen positiven Potenzen von $u/2$ entwickeln. Das Convergenzgebiet dieser neuen Reihen nach $u/2$ ist das gleiche, wie das für die Reihen nach u (wenigstens unter gewissen Voraussetzungen in Bezug auf jene rationale Darstellung, auf die wir hier nicht eingehen wollen), also hat die neue Darstellung hinsichtlich u den doppelten Convergenzradius der früheren. Fährt man so fort, so lässt sich der Convergenzbereich, für den man Entwicklungen der Wurzelgrößen nach u definiren kann, beliebig vergrößern.

Nun lässt sich der zweite Differentialquotient des Logarithmus der Grösse $\sqrt{x-a_i} = f(u)$, ähnlich wie⁹ (241)

$$\frac{d^2 \log sn u}{du^2} = k^2 sn^2 u - \frac{1}{sn^2 u},$$

selbst wieder rational durch diese darstellen und zwar in der Form einer *Differenz* von zwei Functionen, von denen die *eine* nur für die Nullstellen,

⁹WEIERSTRASS gebraucht seines Lehrers GUDERMANN Bezeichnung $sn u$ statt der JACOBI'schen $sinam u$.

die **andere** nur für die Unendlichkeitsstellen von $f(u)$ unendlich wird. Bei dieser Auffassung liegt es nahe, zu versuchen, ob sich nicht $f(u)$ durch einen **Quotienten** ersetzen lässt, dessen Zähler mit der ersten, dessen Nenner mit der zweiten jener Functionen übereinstimmt, und somit jene Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei zu spalten, die nun **neue** Functionen definiren, welche nicht mehr unendlich werden für endliche u , also sich in **beständig** convergirende Potenzreihen müssen entwickeln lassen. Dies gelingt in der That an der Hand eines merkwürdigen Satzes der Functionentheorie, den WEIERSTRASS entwickelt, und es zeigt sich denn auch, dass, wenn man, statt von u zu $u/2$ (wie oben) von u zu u/m geht, wo m eine ganze Zahl ist, diese Reihen für beliebig grosse Werte von m convergiren. Die so erhaltenen Potenzreihen unterscheiden sich aber von den bekannten trigonometrischen Reihen, die JACOBI Thetafunctionen genannt hat, nur durch Factoren $e^{\alpha u^2}$ (α eine Constante); es sind eben jene Reihen, auf die ABEL in seinem Briefe an LEGENDRE hingewiesen hatte.

Diese Auffassung der elliptischen Functionen hat den grossen Vorzug, dass sie einer Ausdehnung auf die allgemeinen hyperelliptischen fähig ist.

31. Potenzentwicklungen für die hyperelliptischen Functionen. Erweiterung des Convergencebereichs.

Sind ρ Summen u_1, u_2, \dots, u_ρ von je ρ hyperelliptischen Integralen erster Gattung mit den oberen Grenzen x_1, x_2, \dots, x_ρ gegeben, ist also

$$du_k = \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{1}{2} \frac{P(x_i)}{x - a_k} \frac{dx_i}{\sqrt{R(x_i)}}, \quad (k = 1, 2, \dots, \rho) \quad (1)$$

wo

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_\rho) \\ R(x) &= (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2\rho+1}) = P(x)Q(x), \end{aligned}$$

und die Grössen a_i complex sind (wir schliessen mit dieser Annahme an die Arbeit (3) an), so handelt es sich darum, die Grössen x_i als Wurzeln einer Gleichung ρ ten Grades darzustellen:

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\rho) = 0,$$

(242) deren Coefficienten eindeutige (transcendente) Functionen der unbeschränkt veränderlichen Grössen u_1, u_2, \dots, u_ρ sind. Nun lassen sich zunächst aus den Differentialgleichungen 1) Reihenentwicklungen ableiten für die Grössen u_i nach Potenzen der $s_i = \sqrt{x_i - a_i} \cdot \text{const.}$, durch deren Umkehrung man erhält:

$$s_i = u_i + (u_1, u_2, \dots, u_\rho)_3 + (u_1, u_2, \dots, u_\rho)_5 + \dots,$$

wo die Klammern homogene Functionen der u vom Grade je des Index bedeuten. Innerhalb eines gewissen endlichen Bereiches $|u_i| < U_i$ convergiren diese Reihen unbedingt. Um nun die Form jener Gleichung $\varphi(x) = 0$ zu bestimmen, nimmt WEIERSTRASS zu den ρ Werten x_i noch $2\mu\rho$ andere hinzu: $x'_i, x''_i, \dots, x_i^{(2\mu)}$ ($i = 1, 2, \dots, \rho$), die zu je ρ wieder mit je ρ von den $2\mu\rho$ Grössen $u'_i, u''_i, \dots, u_i^{(2\mu)}$ durch ähnliche Gleichungen zusammenhängen, wie 1). Diese Grössen lassen sich mit den gegebenen durch die Gleichungen des ABEL'schen Theorems verknüpfen:

$$u_k = \sum_{i=1}^{2\mu} u_k^{(i)}, \quad (k = 1, 2, \dots, \rho)$$

und man kann hiernach eine algebraische Gleichung (vom Grade $2\mu\rho + \rho$) finden, durch welche die x_i mit den $x_i^{(k)}$ verbunden sind. Sie hat nach ABEL die Form:

$$M^2(x)P(x) - N^2(x)Q(x) \equiv \Pi(x)\varphi(x) = 0,$$

wo die ganzen Functionen M, N durch die $2\mu\rho$ Wurzeln $x_i^{(k)}$ von $\Pi = 0$ völlig bestimmt sind.

Aus der Bedingung, dass die linke Seite durch $\Pi(x)$ teilbar sein soll, leitet WEIERSTRASS für die Functionen $M(x), N(x)$ eine gebrochene Form ab, deren Zähler und Nenner sich nach Potenzen der $2\mu\rho$ Grössen $\sqrt{x_i^{(k)} - a_i}$ oder auch der $u_i^{(k)}$ (vermöge jener Reihenumkehrungen) entwickeln lassen. Hieraus ergibt sich für $\varphi(x)$ die folgende Form:

$$\varphi(x) = P(x) \left[1 - \sum_1^{\rho} \frac{1}{x - a_i} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} \psi_i^2 \right],$$

wo die Coefficienten ψ_i , deren Bedeutung aus der Partialbruchentwicklung von $\varphi(x)/P(x)$ erhellt, die Form von **Quotienten** haben:

$$\psi_i = \sqrt{\frac{\varphi(a_i)}{-Q(a_i)}} = \frac{U_1^{(i)} + U_3^{(i)} + \dots}{1 + U_2^{(0)} + U_4^{(0)} + \dots},$$

deren Glieder $U_i^{(k)}$ ganze homogene Functionen der Grössen $u'_1, \dots, u'_\rho; u''_1, \dots, u_\rho^{(2\mu)}$ sind. Diese Reihen convergiren innerhalb derselben Grenzen $|u_i^{(k)}| < U_i$, wie die früheren in den u_i (§ 3, a. E.). Den Uebergang nun zu der definitiven Form von $\varphi(x)$ macht WEIERSTRASS durch die Annahme, dass alle Grössen: $u'_i = u''_i = \dots = u_i^{(\rho)} = u_i/2\mu$ seien (§4). Dann gehen die homogenen Functionen $U_k^{(i)}$ in solche der u_i über; Zähler und Nenner von ψ_i werden Reihen in u_i deren Convergenzbereich in linearer Ausdehnung der 2μ -fache des für die früheren Entwicklungen festgestellt ist, und es zeigt sich, dass die Werte der **Quotienten** ψ_i

(243)

und damit die Coefficienten von $\varphi(x)$ sowie die Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_ρ von der Zahl μ , überhaupt unabhängig sind. — Uebrigens legt WEIERSTRASS, wiewohl er nur solche Reihen sucht, die für **endliche** Werte der u_i gelten, keinen Wert darauf, hervorzuheben, dass die Integralsummen u_i überhaupt niemals unendlich werden können. Jene Quotienten $\psi_i = al(u_1, \dots, u_\rho)_i$ nennt er hyperelliptische Functionen der Argumente u_1, u_2, \dots, u_ρ ; sie gehen für $\rho = 1$ in die elliptischen Functionen $sn u, cn u, dn u$ über, während Zähler und Nenner einzeln den Thetafunctionen entsprechen. Der Uebergang zu diesen selbst würde freilich noch erfordern, dass man (§7) $\mu = \infty$ einführt und so die Entwicklungen zu überall gültigen erhöhe.

Aber diesen Schritt führt WEIERSTRASS nicht aus. Sein Plan ist vielmehr der, ähnlich wie dies oben bei den elliptischen Functionen angedeutet wurde, auf indirectem Weg zu den überall convergirenden Reihen zu gelangen, nämlich durch Spaltung eines Differential des Logarithmus der Function $al(u_1, \dots, u_\rho)$ in zwei vollständige Differentialausdrücke, deren einer nur die Null- und Unbestimmtheitsstellen, deren anderer nur die letzteren und die Unendlichkeitsstellen von al in sich aufnimmt.

Die **principielle** Erledigung dieses Problems führt auf Systeme von Differentialgleichungen, deren Behandlung WEIERSTRASS, nach Cr. J. f. M. Bd. 47, S. 297 und Bd. 52, S. 55, auch durchgeführt haben muss, ohne dass dieselbe in seinen Schriften oder Vorlesungen mitgeteilt worden wäre. Jedoch wurde die Lücke insoweit ausgefüllt, als die functionentheoretische Grundlage, die sich in (3) nur angedeutet findet, später in seinen Abhandlungen zur Functionenlehre Berlin 1886 („Einige auf die Theorie“ etc. § 5) angegeben worden ist. Wir müssen es uns indessen versagen, auf diese namentlich durch ihren grundlegenden „Vorbereitungssatz“ wichtig gewordene Arbeit hier einzugehen.

32. Uebergang zur Thetafunction durch Heranziehen von Integralsummen dritter und zweiter Gattung.

Von der erwähnten principiellen Erledigung absehend, aber doch denselben Grundgedanken der Zerlegung verfolgend, schlägt WEIERSTRASS in der früheren Abhandlung (2), wie in seinen späteren Vorlesungen, einen einfacheren Weg zur Thetafunction ein, indem er die Summe von Integralen zweiter und dritter Gattung in ihrer Abhängigkeit von den u betrachtet. Die Functionen:

(244)

$$\psi_i = \sqrt{\frac{\varphi(a_i)}{-Q(a_i)}} = al(u_1, u_2, \dots, u_\rho)_i$$

werden zunächst definirt wie oben. Vermittelst des Additionstheorems, das für sie besteht, werden ihre Periodicitätseigenschaften abgeleitet. Perioden der al_i sind die doppelten reellen bzw. rein imaginären Vielfachen der bestimmten Integrale erster Gattung, die sich je zwischen den Grenzen a_i und $a_{i+\rho}$ erstrecken. Die Letzteren werden in dieser Abhandlung alle als **reell** ($a_1 > a_{\rho+1} > a_2 > a_{\rho+2} >$

$\dots a_{2\rho+1}$) angesehen. Diese Annahme erleichtert es dem Verfasser, den Weg formaler Rechnung bei Aufstellung der Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln zu betreten. Nun führt der Verfasser Integralsummen dritter Gattung ein:

$$\sum_{i=1}^{\rho} \int_{a_i}^{x_i} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = Sl(u_1, u_2, \dots, u_{\rho}),$$

durch deren Differentiation nach dem Parameter a_k (oder vielmehr nach $b = P(a_k)/\sqrt{R(a_k)}$ an der Stelle $a = a_k$) sich Integralsummen zweiter Ordnung ergeben:

$$dSl(u_1, \dots, u_{\rho})_k = \sum_{i=1}^{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} \frac{P(x_i) dx_i}{(x_i - a_k)^2 \sqrt{R(x_i)}} \right\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass der Ausdruck:

$$- \sum_i (J_i^{(j)} + Sl(u_1 - K_1^{(j)}, u_2 - K_2^{(j)}, \dots)_i) du_i = d \log Al(u_1, u_2, \dots),$$

wo $J_i^{(j)}, K_i^{(j)}$ bestimmte Integrale zweiter bzw. erster Gattung sind (j eine von i abhängige Zahl), ein vollständiges Differential ist. Die durch sie definirte Function $Al(u_1, \dots, u_{\rho})$ ist, wie der Verfasser angiebt, in eine für alle Werte der u convergente Reihe entwickelbar. Diese und die analog gebildeten Reihen sind das Ziel der Untersuchung. Durch sie drücken sich ebensowohl die Integralsummen dritter Gattung Sl aus, wie auch die Functionen $al(u_1, \dots, u_{\rho})_i$, letztere als Quotienten von zweien; sie steht mit der verallgemeinerten Thetafunction $Jc(v_1, v_2, \dots, v_{\rho})$ in der Beziehung: $g \cdot e^{E(u_1, u_2, \dots, u_{\rho})} \cdot Al(u_1, u_2, \dots, u_{\rho}) = Jc(v_1, v_2, \dots, v_{\rho}) = \sum \left\{ e^{-\sum n_i n_j \delta_{ji}} \cos(\sum n_i v_i) \right\}$, wo E eine ganze homogene Function zweiter Ordnung der Grössen u ist, g eine Constante, δ_{ij} eine homogene Function der bestimmten Integrale erster Gattung, die Zahlen i, j die Werte 1, 2, \dots, ρ durchlaufen, die n_i, n_j von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, und wo die v mit den u durch lineare Gleichungen zusammenhängen, deren Coefficienten sich gleichfalls in bestimmt angegebener Form aus bestimmten Integralen zusammensetzen. Die Coefficienten $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ des quadratischen Ausdrucks im Exponenten von e des allgemeinen Gliedes der Thetafunction, $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ an der Zahl, drücken sich mit Hülfe der bestimmten Integrale erster Gattung K aus und hängen nur von den in diesen enthaltenen $2\rho-1$ Moduln ab (nämlich den Wurzeln von $R(x) = 0$, vermindert um 3 vermöge linearer Substitution zerstörbare willkürliche Constanten). Hiermit ist aber für das hyperelliptische Umkehrproblem die von JACOBI aufgeworfene Frage (Geschichte der ellipt. etc. Transc., Werke II, S. 521) beantwortet: wie sich der Unterschied zwischen den Zahlen $2\rho-1$ und $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$, der für den von GÖPEL und ROSENHAIN behandelten Fall $\rho = 2$ noch nicht zu Tage tritt, erklären lasse? In expliciterer Form hat WEIERSTRASS diese Relationen durch das Verschwinden der Thetafunction und einer Reihe ihrer Differentialquotienten

für gewisse halbe Perioden dargestellt (vgl. KÖNIGSBERGER, J. f. M. Bd. 64, S. 25).

Die Relationen, die, analog der bekannten LEGENDRE'schen, nebenher noch zwischen den bestimmten Integralen erster und zweiter Gattung bestehen, hat WEIERSTRASS in (2) aus den Periodicitätseigenschaften der Function Al abgeleitet.

33. Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln.

Die *Programmschrift* (1) ist fast ausschliesslich der Aufstellung dieser Relationen gewidmet, ermittelt sie aber auf einem anderen Wege, den WEIERSTRASS wiederum einem Gedanken von ABEL entnimmt. Er zerlegt nämlich (Rf. III Nr. 16 Schlussformel) ein gewisses Doppelintegral einmal in Summen von Producten von je zwei einfachen Integralen, die sich als bestimmte Integrale darstellen, auf der anderen Seite in die Summe zweier einfachen Integrale, die sich direct ausführen lassen. Auch diese Operation vollzieht sich auf dem Wege rein algebraischer Umformung, ohne, wie dies hier nahe gelegen hätte, die Integration durch imaginäres Gebiet in Anspruch zu nehmen.

34. Rückblick: Weierstrass' Hilfsmittel.

Mit diesen Arbeiten schliesst eine ergebnisreiche Episode der Geschichte unserer Theorie ab, merkwürdig auch darum, weil ein einzelner Zweig, ausser Zusammenhang mit der nebenher mächtig emporstrebenden allgemeinen Theorie der Functionen, für sich zu so unerwarteter Ausbildung gelangt ist. Und zwar waren es, nachdem ABEL und JACOBI den Weg zu den mehrfach periodischen Functionen gezeigt hatten, nicht sowohl neue Combinationen, fremdartige Hilfsmittel, die den Erfolg bewirkten: er beruhte einfach auf der Vertiefung in den Zusammenhang der Probleme und in die Natur ihrer Lösung und auf einer umsichtigen Handhabung des Calcüls.

(246) Einen fundamentalen Gedanken hat WEIERSTRASS zunächst mit der Einführung der Potenzreihen von mehreren (complexen) Variablen hereingetragen, die er für die Reduction des Umkehrproblems auf die neuen Transcendenten verwertete. Diese selbst boten sich ihm in neuer Form dar. Von den Thetafunctionen, deren rasch convergirende Entwicklung nach trigonometrischen Functionen unübertrefflich schien, nur durch einen nie verschwindenden Factor unterschieden, zeigten die neuen Transcendenten mit einem Mal den Charakter der Unveränderlichkeit gegenüber linearen Transformationen des Arguments, und erwiesen sich einer einfachen, für alle Werte der Argumente convergenten *Potenzentwicklung* fähig.

Die Glieder dieser Potenzentwicklung besitzen — zunächst, wie WEIERSTRASS erkannte, für die elliptischen und, wie KLEIN, BURKHARDT u. A. neuerdings gezeigt haben, auch für die ultraelliptischen Integrale —, wenn die Function

aus einer Summe von passend normirten Integralen dritter Gattung abgeleitet ist, invariante Eigenschaften gegenüber einer linearen Transformation des Wurzelausdrucks unter dem Integralzeichen. So wurden diese neuen Reihen, die σ -Functionen, in Verbindung mit der invarianten Form des Integranden selbst zum Ausgangspunkt für eine neue Theorie der elliptischen Functionen. Diese hat vor der JACOBI'schen den Vorzug, begrifflich invariante Operationen auch formal invariant zu gestalten, und umgeht namentlich die Auflösung des Wurzelausdrucks in seine Linearfactoren. Für die *Anwendungen* hat wiederum die Thetafunction, die JACOBI den Bedürfnissen der Praxis in Geometrie und Mechanik mit unerreichten Geschick angepasst hat, vor der σ -Function unbestreitbare Vorzüge. [Man vergl. den diesen Anwendungen gewidmeten zweiten Band der Théorie des fonct. ellipt. von HALPHEN (3 Bde., Paris 1886/91), der von der WEIERSTRASS'schen Bezeichnung ausgeht, aber in den Schlussformeln immer wieder auf die trigonometrischen Reihen zurück greift.]

Die Potenzreihen mit n Argumenten hat WEIERSTRASS auch seinen späteren Untersuchungen über allgemeine Functionentheorie zu Grunde gelegt, auf die wir bei diesem Anlass nur noch kurz hinweisen wollen.

In seinen Vorlesungen (die Schrift von BIERMANN, Theorie der analytischen Functionen, nach Vorlesungen von WEIERSTRASS, Leipzig 1887, ist zwar ohne Mitwirken des Urhebers verfasst und im Einzelnen nicht immer verlässlich, gewährt aber doch einen Ueberblick) hat WEIERSTRASS für die Potenzreihen mit ganzen, positiven Exponenten — auf Grund ihrer Analogie mit den ganzen Functionen — einen Algorithmus begründet, der für ihre Behandlung eine sichere Stütze bietet. Namentlich der heiklen Frage der Teilbarkeit von solchen Potenzreihen durch andere widmen die Vorlesungen grundlegende Untersuchungen (s. auch WEIERSTRASS' Abh. zur Funct.-Lehre, 5. Abh.). Auf dieser Basis hat WEIERSTRASS den fundamentalen Begriff der „analytischen Function“ errichtet, welche alle einer Potenzentwicklung zugänglichen Functionen umfasst, und die aus dem Inbegriff ihrer Fortsetzungen in dem Gesamtbereiche der unabhängigen Veränderlichen besteht. Diese Fortsetzungen werden, nach passender Wahl der letzteren, durch wenn auch mühsame und in praxi schwer durchführbare, so doch sichere Rechnungsmethoden gewährleistet.

(247)

35. Die zunächst unerledigt gebliebenen Fragen in Betreff des Umkehrproblems.

So sehr diese Untersuchungen den allgemeinen Functionsbegriff förderten, so bedurfte es doch bei denjenigen algebraischen Functionen, von denen die Lösung des allgemeinen Umkehrproblems abhing, anderer Hilfsmittel. Der Geschlechtsbegriff hätte sich allenfalls aus ABEL's und MINDING's Arbeiten ableiten lassen, wenn man den des Integranden erster Gattung hinzugenommen hätte. Dieser hätte auch auf die φ -Function — den Angelpunkt der Theorie — und auf die Construction

von algebraischen Functionen, die gegebenen Unstetigkeitsbedingungen genügen, hinführen können. Aber zu diesen Operationen mussten noch der Begriff der eindeutigen Transformation, auf den die RIEMANN'sche Auffassung in so natürlicher Weise hinführt, die Untersuchung der Moduln, der Verschwindungsstellen der Thetafunction u. a. fundamentale Sätze und Begriffe hinzutreten. Zunächst jedoch fehlte die Bildung, ja selbst die Formulirung des Begriffs des überall endlichen Integrals, ferner ein Mittel zur Bestimmung der Perioden, die schon CAUCHY mit allen Hilfsmitteln der Integration durch das Imaginäre vergeblich zu bestimmen versucht hatte.

Methodische Strenge, scharfe Umgrenzung der Resultate, unumstössliche Existenzbeweise — die grossen Vorzüge der CAUCHY'schen und der WEIERSTRASS'schen Arbeiten — bezeichnen in jeder mathematischen Disciplin ein wichtiges, aber eigentlich erst das *letzte* Stadium der Entwicklung.

(248) Ihm voraus muss eine Periode der freien, vielleicht regellosen Production, der Verknüpfung disparater Begriffe und Erscheinungen gehen, zu der dem Erfinder das Material oft aus fernabliegenden, gelegentlich entdeckten Quellen zuströmt, wo dann erst die Sichtung und Anordnung zu einer Theorie den Meister zeigt. Das Eingreifen RIEMANN's bezeichnet für die Theorie der Functionen eine solche Periode freier Erfindung und intuitiven Schaffens. Aus der mathematischen Physik erwuchs ihm die Einsicht in Functionen, die aus ihren Unstetigkeitsstellen und ihrem Verhalten längs der Begrenzung eines Bereiches im Inneren desselben bestimmt sind. Indem er diese Auffassung in die Theorie der Functionen einer complexen Variabein, wie sie GAUSS und CAUCHY begründet hatten, übertrug, enthüllte RIEMANN das Wesen der mehrfach periodischen Function und den Kern des Umkehrproblems.

Mit welchem Erfolge in späterer Zeit die Methode der Sichtung und strengen Begründung wieder einsetzte, darüber werden wir in den folgenden Abschnitten dieses Referats zu berichten haben.

Zunächst wenden wir uns zu RIEMANN.